ДИНАМИКА

ТОЧКИ ПЕРЕМѢННОЙ МАССЫ.

РАЗСУЖДЕНІЕ

И. Мещерскаго.



САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
(Вас. Остр., 9 лин., № 12).
1897.



ДИНАМИКА

ТОЧКИ ПЕРЕМѢННОЙ МАССЫ.

РАЗСУЖДЕНІЕ

И. Мещерскаго.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
(Вас. Остр., 9 лин., № 12).
1897.

ДИНАМИКА

ТОЧКИ ПЕРЕМѢННОЙ МАССЫ.

РАЗСУЖДЕНІЕ

И. Мещерскаго.



САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
(Вас. Остр., 9 лин., № 12).
1897.

По опредѣленію Физико-Математическаго Факультета Императорскаго С.-Петербургскаго Университета печатать разрѣшается.

С.-Петербургъ, 15-го марта 1897 г. Деканъ *А. Совѣтовъ.*

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Until we know thoroughly the nature of matter and the forces which produce its motions, it will be utterly impossible to submit to mathematical reasoning the *exact* conditions of any physical question.

Thomson and Tait.

Natural Philosophy. P. II, p. 1.

Настоящее разсужденіе представляетъ первый опытъ изложенія динамики точки, масса которой измѣняется во время движенія; — глава, посвященная движенію твердаго тѣла перемѣнной массы, служитъ только введеніемъ и помѣщена здѣсь главнымъ образомъ потому, что переходъ отъ болѣе нагляднаго къ менѣе наглядному способствуетъ вообще ясности изложенія. Имѣя это въ виду, въ первыхъ двухъ главахъ, предметъ которыхъ составляютъ общія уравненія движенія, мы разсматриваемъ сначала измѣненіе массы чрезъ конечные промежутки времени и отсюда уже переходимъ къ непрерывному измѣненію массы; — такого рода пріемъ примѣняется въ

динамикѣ, какъ извѣстно, съ первыхъ временъ ея существованія. Въ слѣдующихъ пяти главахъ излагается рѣшеніе вопросовъ о движеніи точки перемѣнной массы въ различныхъ частныхъ случаяхъ при дѣйствіи силы тяжести и силъ центральныхъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ГЛАВА II.

ГЛАВА III.

ГЛАВА IV.

ГЛАВА V.

§§ стр.

Обратныя задачи . . . . 95—118

I. Скорость измѣняющей массы равна скорости точки.

II. Скорость измѣняющей массы равна нулю.

III. Скорость измѣняющей массы направлена по одной прямой со скоростью точки.

ГЛАВА VI.

Движеніе тяжелой точки . . . . . . 119—135

ГЛАВА VII.

Приложеніе.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

	Напечатано:	*Слѣдовало напечатать:*
Стр. 2 строка 25	предположенія	предложенія
» 16 » 28	$\frac{\partial \xi}{\partial t}$	$\frac{d\xi}{dt}$
» 30 » 6	замѣтимъ	замѣтимъ,
» » » 7	вытекаетъ	вытекаетъ также и
» 35 » 17	$\int_{t_0}^{t'}$	$\int_{t_0}^{t}$

Предметъ разсужденія.

1. Въ механикѣ масса движущагося тѣла разсматривается обыкновенно какъ величина постоянная; между тѣмъ существуютъ случаи движенія, гдѣ масса тѣла измѣняется.

Такіе случаи намъ представляетъ сама природа: масса земли возрастаетъ вслѣдствіе паденія на нее метеоритовъ; масса метеорита, движущагося въ атмосферѣ, убываетъ вслѣдствіе того, что нѣкоторыя частицы его или отрываются, или сгораютъ; масса падающей градины или снѣжинки возрастаетъ въ тѣхъ частяхъ пути, гдѣ на нее осѣдаютъ пары изъ окружающей атмосферы, и убываетъ вслѣдствіе испаренія тамъ, гдѣ она проходитъ чрезъ слои воздуха болѣе теплые и болѣе сухіе; плавающая льдина представляетъ примѣръ, гдѣ масса возрастаетъ вслѣдствіе намерзанія и убываетъ вслѣдствіе таянія, и т. д.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ измѣненіе массы вызывается искусственно: убываетъ масса летящей ракеты вслѣдствіе сгоранія; убываетъ масса аэростата при выбрасываніи балласта; возрастаетъ масса привязного аэростата, когда онъ, поднимаясь, вытягиваетъ за собою канатъ; возрастаетъ масса корабля при нагрузкѣ и убываетъ при разгрузкѣ, и т. д.

Вообще, если тѣло находится въ воздухѣ, масса его можетъ возрастать вслѣдствіе осѣданія пыли и паровъ, вслѣдствіе присоединенія частицъ другихъ тѣлъ, съ которыми оно приходитъ въ соприкосновеніе;— масса можетъ убывать вслѣдствіе сгоранія, испаренія, распыленія.

Если тѣло находится въ жидкости, его масса можетъ возрастать вслѣдствіе осѣданія на поверхности нѣкоторыхъ частицъ изъ этой жидкости, вслѣдствіе намерзанія,—можетъ убывать вслѣдствіе размыванія тѣла жидкостью, вслѣдствіе растворенія или таянія.

Существованіе вышеуказанныхъ случаевъ представляетъ достаточное основаніе для того, чтобы заняться изученіемъ тѣхъ вопросовъ, которые относятся къ движенію тѣлъ перемѣнной массы.

Замѣтимъ, что, разсматривая массу тѣла, какъ величину перемѣнную, мы нисколько не противорѣчимъ тѣмъ опредѣленіямъ массы тѣла, которыя приняты въ механикѣ, будетъ ли это опредѣленіе Ньютона: „quantitas materiae est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim...... hanc autem quantitatem sub nomine corporis vel massae in sequentibus passim intelligo“ („*Philosophiae naturalis principia mathematica*“. Definitio I), или опредѣленіе, напримѣръ, Герца въ его „*Die Principien der Mechanik*“ *); — то и другое опредѣленіе допускаютъ измѣняемость массы тѣла.

2. При измѣненіи массы тѣло, вообще говоря, испытываетъ удары; простѣйшій случай представляется при этомъ тогда, когда удары не оказываютъ вліянія на движеніе тѣла или совершенно отсутствуютъ, какъ, напримѣръ, въ случаѣ аеростата, если балластъ пускается съ относительною скоростью, равною нулю; поэтому естественно было, приступая къ разсмотрѣнію движенія тѣла при измѣненіи массы, начать именно съ того случая, когда дѣйствіе ударовъ на тѣло въ разсчеты не входитъ.

Нѣкоторыя общія предположенія, относящіяся къ этому случаю, были изложены мною въ засѣданіи С.-Петербургскаго Математическаго Общества 15-го января 1893 г.; въ своемъ сообщеніи, обращая затѣмъ особенное вниманіе на тотъ случай, когда массы точекъ системы измѣняются по одному и тому же закону въ зависимости отъ времени, я указалъ, какъ примѣръ, задачу n тѣлъ при измѣненіи массъ и, въ частности, задачу двухъ тѣлъ, когда она допускаетъ рѣшеніе въ конечномъ видѣ.

*) «Gesammelte Werke von Heinrich Hertz», 1894, Bd. III, Abschnitt 1, S. 54.

При дальнѣйшей разработкѣ вопроса, принимая уже въ разсчетъ и удары, я разсматривалъ главнымъ образомъ задачи, соотвѣтствующія важнѣйшимъ задачамъ динамики постоянныхъ массъ, и пришелъ какъ въ случаѣ одной точки, такъ въ случаѣ системы точекъ и, въ частности, твердаго тѣла, къ ряду задачъ, которыя, не смотря на ихъ большую, сравнительно, сложность, допускаютъ тѣмъ не менѣе рѣшеніе въ квадратурахъ.

Въ настоящемъ разсужденіи изложены тѣ изслѣдованія, которыя относятся къ движенію точки перемѣнной массы.

3. **„Очеркъ литературы"** содержитъ все то, что мнѣ удалось найти въ литературѣ относительно вліянія измѣненія массы тѣла на движеніе.

Такъ какъ измѣненіе массы мы наблюдаемъ только въ случаѣ тѣлъ конечныхъ размѣровъ, то, чтобъ имѣть основаніе для изученія движенія точки перемѣнной массы, нужно прежде всего показать, что задача о движеніи тѣла перемѣнной массы можетъ привести насъ къ соотвѣтствующей задачѣ о движеніи точки перемѣнной массы; поэтому въ главѣ I и говорится о движеніи тѣла перемѣнной массы.

Установивши, какъ именно мы будемъ разсматривать измѣненіе массы движущагося тѣла, мы занимаемся сначала движеніемъ тѣла, масса котораго измѣняется чрезъ извѣстные промежутки времени; примѣромъ служитъ вертикальное движеніе аеростата при выбрасываніи балласта.

Затѣмъ переходимъ къ случаю непрерывнаго измѣненія массы, который только далѣе и разсматриваемъ.

Полагая, что масса твердаго тѣла и величины, отъ нея зависящія, суть непрерывныя функціи времени, положенія тѣла, его поступательной и угловой скорости, а также длины путей, пройденныхъ нѣкоторыми точками тѣла, мы получаемъ для движенія твердаго тѣла перемѣнной массы при отсутствіи ударовъ дифференціальныя уравненія, отнесенныя къ осямъ, связаннымъ съ тѣломъ; эти уравненія имѣютъ тотъ же видъ, что и для движенія тѣла постоянной массы.

1*

Затѣмъ переходимъ къ случаю, когда принимаются въ разсчетъ удары; дѣйствіе этихъ ударовъ на тѣло можно замѣнить дѣйствіемъ нѣкоторой системы непрерывно дѣйствующихъ силъ, которыя называемъ прибавочными.

Опредѣляемъ проекціи прибавочной силы въ случаѣ поступательнаго движенія тѣла и при томъ только тогда, когда масса тѣла не зависитъ отъ его скорости,—въ общемъ случаѣ примѣняемый методъ не имѣетъ мѣста.

Для того, чтобъ убѣдиться на примѣрахъ въ томъ, что полученныя дифференціальныя уравненія выражаютъ разсматриваемое движеніе, приведены двѣ задачи относительно вертикальнаго движенія тяжелаго однороднаго цилиндра и двѣ задачи A. Cayley.

Полученныя дифференціальныя уравненія могутъ быть разсматриваемы, какъ уравненія движенія точки перемѣнной массы.

Далѣе замѣчаемъ, что масса тѣла можетъ измѣняться такимъ образомъ, что центръ инерціи сохраняетъ свое положеніе относительно тѣла; въ этомъ случаѣ получаются дифференціальныя уравненія того же вида, что и въ случаѣ движенія поступательнаго; эти уравненія также могутъ быть разсматриваемы въ нѣкоторыхъ случаяхъ, какъ уравненія движенія точки перемѣнной массы.

Мы переходимъ затѣмъ къ движенію точки, масса которой измѣняется.

Въ главѣ II, замѣтивши, что рѣшеніе задачи о движеніи точки при измѣненіи массы чрезъ извѣстные промежутки времени приводится къ послѣдовательному рѣшенію ряда задачъ о движеніи точки постоянной массы, мы далѣе разсматриваемъ въ общемъ видѣ тотъ случай, когда масса точки измѣняется непрерывно.

Беремъ сначала случай, когда скорость измѣняющей массы равна скорости точки.

Предполагая, что масса точки выражается нѣкоторой функціей времени, положенія и скорости точки, а также длины пути, ею пройденнаго, мы получаемъ, не пользуясь выведенными уже уравненіями движенія тѣла, дифференціальныя уравненія движенія какъ свобод-

ной, такъ и несвободной точки; эти уравненія имѣютъ тотъ же видъ, что и для точки постоянной массы; отсюда слѣдуетъ предложеніе, которое позволяетъ отъ общихъ формулъ динамики точки постоянной массы перейти къ соотвѣтствующимъ формуламъ динамики точки перемѣнной массы, если при измѣненіи массы не происходитъ ударовъ; указываемъ нѣкоторыя предложенія, относящіяся къ количеству движенія и живой силѣ точки, къ уравненіямъ движенія въ какихъ угодно координатахъ и т. д.

Обращаясь затѣмъ къ случаю, когда скорость измѣняющей массы не равна скорости точки, выводимъ дифференціальныя уравненія движенія какъ свободной, такъ и несвободной точки въ предположеніи, что масса точки не зависитъ отъ ея скорости; полученныя уравненія отличаются отъ соотвѣтствующихъ уравненій въ случаѣ точки постоянной массы только тѣмъ, что къ задаваемымъ силамъ присоединяется прибавочная сила, проекціи которой на координатныя оси выражаются извѣстнымъ образомъ.

Далѣе разсматриваемъ слѣдствія, вытекающія изъ выведенныхъ уравненій при различныхъ предположеніяхъ относительно скорости измѣняющей массы, а также нѣкоторыя преобразованія этихъ уравненій и случаи, въ которыхъ точка перемѣнной массы описываетъ геодезическую линію на данной поверхности.

Замѣтимъ, что въ дифференціальныя уравненія движенія точки перемѣнной массы, вообще говоря, входитъ длина пути, пройденнаго точкой, — обстоятельство, которое не встрѣчается въ случаѣ точки постоянной массы.

Остальныя пять главъ III—VII посвящены рѣшенію различныхъ *задачъ* о движеніи точки перемѣнной массы.

При выборѣ задачъ имѣлось въ виду удовлетворить слѣдующимъ требованіямъ:

1) задачи должны служить для выясненія того вліянія, которое измѣненіе массы точки въ различныхъ случаяхъ оказываетъ на ея движеніе;

2) силы, приложенныя къ точкѣ, должны принадлежать къ числу тѣхъ, которыми обыкновенно пользуются при объясненіи движеній,

наблюдаемыхъ въ природѣ,—каковы: сила тяжести, сила притяженія по закону Ньютона, сопротивленіе среды, пропорціональное квадрату скорости и т. д.;

3) рѣшеніе задачи должно приводиться къ квадратурамъ и, въ крайнемъ случаѣ, къ интегрированію уравненій уже изученныхъ, каковы, напримѣръ, уравненія Риккати и Бесселя; это требованіе соотвѣтствуетъ извѣстному мнѣнію Якоби: „quo majores in genere difficultates parit integratio aequationum differentialium dynamicarum, eo majore cura ea examinare debemus problemata mechanica, in quibus integrationem ad quadraturas perducere contigit". (Jacobi. „*De motu puncti singularis*". Crelle's Journal, Bd. 24, S. 5. 1842; Gesammelte Werke, Bd. IV, S. 265).

Глава III содержитъ задачи о прямолинейномъ движеніи точки перемѣнной массы и прежде всего тѣ, къ которымъ мы приходимъ, разсматривая вертикальное движеніе горящей ракеты и привязного аэростата; затѣмъ вкратцѣ указанъ случай свободнаго аэростата, масса котораго выражается нѣкоторой функціей разстоянія его отъ земли, и далѣе рѣшается задача о движеніи тяжелой точки массы $m = m_0 (1 + \alpha t)^2$ при сопротивленіи среды, пропорціональномъ квадрату скорости.

Въ главѣ IV разсматривается задача о криволинейномъ движеніи точки въ случаѣ, когда оно выражается такъ же, какъ и прямолинейное, однимъ дифференціальнымъ уравненіемъ 2-го порядка, именно задача о малыхъ колебаніяхъ кругового маятника въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально скорости; въ случаѣ, когда сопротивленіе среды, разсчитанное на единицу массы при единицѣ скорости, равно $a(1 + \alpha t)^{-1}$, гдѣ a и α величины постоянныя, рѣшеніе задачи выражается чрезъ функціи Бесселя.

Переходя затѣмъ къ задачамъ о криволинейномъ движеніи свободной точки, мы прежде всего останавливаемся на задачахъ обратныхъ, которыя и составляютъ предметъ главы V.

Въ этихъ задачахъ требуется опредѣлить законъ измѣненія массы

точки такимъ образомъ, чтобы точка, двигаясь въ сопротивляющейся средѣ при дѣйствіи данной силы, пропорціональной массѣ, описывала данную плоскую кривую; предполагается, что сила, разсчитанная на единицу массы, зависитъ только отъ положенія точки.

Разсматривается прежде всего случай, когда при измѣненіи массы точки ударовъ не происходитъ; къ этому случаю приводится разсматриваемая задача и тогда, когда скорость измѣняющей массы равна нулю или направлена по одной прямой со скоростью точки.

Отъ общей задачи переходимъ къ задачамъ болѣе и болѣе частнымъ: когда данная сила есть сила тяжести, затѣмъ, когда при этомъ данная кривая парабола, и, наконецъ, когда сопротивленіе среды пропорціонально нѣкоторой степени скорости.

Глава VI посвящена рѣшенію задачъ о движеніи тяжелой точки.

Здѣсь въ началѣ указана задача, къ которой мы приходимъ при разсмотрѣніи поступательнаго движенія въ пустотѣ тяжелаго тѣла, когда задана относительная скорость, по отношенію къ тѣлу, центра инерціи измѣняющихъ частицъ.

Далѣе излагается рѣшеніе задачи о движеніи тяжелой точки въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально квадрату скорости, въ томъ случаѣ, когда масса точки и коэффиціентъ сопротивленія суть нѣкоторыя функціи длины пути, пройденнаго точкой.

Предполагаемъ сначала, что скорость измѣняющей массы равна скорости точки; къ этому случаю приводится задача и тогда, когда скорость измѣняющей массы равна нулю или направлена по одной прямой со скоростью точки.

Рѣшеніе задачи разсматривается болѣе подробно въ томъ частномъ случаѣ, когда сопротивленіе среды, разсчитанное на единицу массы при единицѣ скорости, равно $(a+bs)^{-1}$, гдѣ a и b величины постоянныя.

Въ концѣ указаны нѣкоторыя общія свойства движенія тяжелой точки перемѣнной массы въ сопротивляющейся средѣ.

Въ **главѣ VII** разсматриваемъ движеніе точки при дѣйствіи центральной силы.

Въ началѣ указываемъ нѣкоторыя слѣдствія дифференціальныхъ уравненій движенія въ случаѣ центральной силы при различныхъ предположеніяхъ относительно скорости измѣняющей массы; при этомъ отмѣчаемъ случай, когда уравненія движенія имѣютъ тотъ же видъ, что и въ задачѣ о движеніи точки постоянной массы, на которую, кромѣ силы притяженія по закону Ньютона, дѣйствуетъ еще сила тяжести.

Затѣмъ подробно разбираемъ задачу о движеніи точки, притягиваемой къ неподвижному центру по закону Ньютона, предполагая, что масса ея выражается формулой: $m = m_0 (1 - \alpha t)^{-1}$, гдѣ m_0 и α величины постоянныя, причемъ скорость измѣняющей массы равна нулю.

Въ заключеніе приведены два частныхъ примѣра на движеніе точки при дѣйствіи силы притяженія по закону Ньютона, въ которыхъ скорость измѣняющей массы направлена — въ одномъ примѣрѣ, по той же прямой, что и скорость точки, а въ другомъ, по линіи, соединяющей точку съ центромъ силы.

Очеркъ литературы по вопросу о движеніи тѣлъ перемѣнной массы.

1. Въ курсахъ теоретической механики мы встрѣчаемъ изложеніе вопросовъ, въ которыхъ принимается во вниманіе измѣненіе массы, но лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда это измѣненіе происходитъ только въ одинъ моментъ, какъ, напримѣръ, при прямомъ ударѣ совершенно неупругихъ шаровъ; сюда же можетъ быть отнесена и задача о движеніи баллистическаго маятника послѣ того, какъ масса его увеличилась вслѣдствіе вступленія снаряда въ пріемникъ.

Объ измѣненіи массы говорится также при разсмотрѣніи колебаній системы около положенія равновѣсія; лордъ Rayleigh въ своемъ сочиненіи *„Theory of Sound"* говоритъ о томъ вліяніи, которое оказываетъ измѣненіе массы въ какой-либо части консервативной системы на продолжительность періода колебаній системы,— онъ нашелъ, что періодъ колебаній, вообще говоря, удлинняется при возрастаніи массы и укорачивается при ея уменьшеніи. („Theory of Sound", vol. I, art. 88. 1877).

Въ *„Dynamic of a system of rigid bodies"* E. Routh въ статьѣ о колебаніяхъ системы около положенія равновѣсія также разсматриваетъ вліяніе, которое оказываетъ при этомъ „возрастаніе инерціи" какой-либо части системы въ томъ предположеніи, что силы не претерпѣваютъ измѣненія. („The advanced part" § 76. 1884).

Мгновенное измѣненіе массы встрѣчается и въ теоріи корабля; здѣсь рѣшается, напримѣръ, задача о томъ, какъ измѣняется положе-

ніе равновѣсія корабля, если въ нѣкоторой его точкѣ будетъ помѣщенъ или удаленъ какой-либо грузъ; — эта задача и ея примѣненія изложены въ „*Théorie du navire*“ J. Pollard et A. Dudebout, t. II, 1891, ch. XXIV, XXV, pp. 79—103.

Тиссеранъ въ „*Mécanique céleste*“ также разсматриваетъ мгновенное измѣненіе массы: во второмъ томѣ, ch. XXIX, pp. 482—489, предполагая, что къ массѣ земли присоединяется нѣкоторая малая масса, напримѣръ, аеролитъ, Тиссеранъ опредѣляетъ соотвѣтствующее измѣненіе величинъ главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи и направленій главныхъ центральныхъ осей инерціи земли.

2. Измѣненіе массы, совершающееся *непрерывно*, разсматриваетъ впервые, насколько мнѣ извѣстно, A. Cayley въ статьѣ: „*On a class of dynamical problems*“, которая появилась въ 1857 году въ журналѣ „Proceedings of the Royal Society of London“, vol. III, pp. 506—511, а затѣмъ въ „Philosophical Magazine and Journal of science“, 1858, vol. XV, pp. 306—310 *).

Подъ именемъ „одного класса динамическихъ задачъ“ здѣсь разумѣются „задачи съ непрерывными ударами“ — „continuous-impact problems“—, т. е. тѣ задачи, въ которыхъ „къ системѣ непрерывно присоединяются частицы безконечно малыхъ массъ такимъ образомъ, что скорость системы измѣняется непрерывно, между тѣмъ какъ скорости частицъ измѣняются на величины конечныя въ моментъ ихъ присоединенія къ системѣ“.

Авторъ имѣетъ въ виду слѣдующую задачу: *опредѣлить движеніе тяжелой цѣпи, одна часть которой лежитъ на столѣ у самаго края, а другая часть свѣшивается внизъ и представляетъ движущуюся систему.*

Въ каждый элементъ времени dt эта система присоединяетъ къ себѣ и приводитъ въ движеніе съ конечною скоростью безконечно малую длину ds цѣпи.

---

*) «The collected Mathematical Papers of Arthur Cayley», vol. IV, № 225, pp. 7—11.

Общее уравненіе динамики въ примѣненіи къ разсматриваемымъ задачамъ авторъ представляетъ въ видѣ:

$$\sum\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right]dm+$$
$$+\sum(\Delta u\,\delta\xi+\Delta v\,\delta\eta+\Delta w\,\delta\zeta)\,.\,\frac{1}{dt}\,d\mu=0;$$

находя, что первая строка не требуетъ объясненій, онъ указываетъ значенія членовъ второй строки: ξ, η, ζ координаты въ моментъ t частицы $d\mu$, которая вступаетъ въ соединеніе съ системой; Δu, Δv, Δw — проекціи конечнаго приращенія скорости $d\mu$ и $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ — проекціи возможнаго перемѣщенія этой частицы, если ее разсматривать ужé, какъ часть системы; суммированіе распространяется на всѣ частицы $d\mu$, присоединяющіяся къ системѣ въ моментъ t.

Указавши, какъ преобразуется написанное уравненіе, если ввести независимыя координаты, авторъ переходитъ къ рѣшенію вышеупомянутой задачи въ томъ предположеніи, что масса какой-либо части цѣпи пропорціональна ея длинѣ.

Полагая, что ось Oz направлена по вертикали внизъ, изъ общаго уравненія получаемъ:

$$\sum\left(\frac{d^2z}{dt^2}-g\right)\delta z\,dm+\frac{d\zeta}{dt}\,\delta\zeta\,.\,\frac{1}{dt}\,d\mu=0.$$

Пусть s длина той части цѣпи, которая находится въ движеніи, тогда это уравненіе намъ дастъ:

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}-g\right)s+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=0,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

отсюда получаемъ первый интегралъ:

$$\frac{s\,ds}{\sqrt{s^3-a^3}}=\sqrt{\frac{2g}{3}}\,dt,$$

гдѣ a длина висящей части цѣпи въ начальный моментъ.

Авторъ полагаетъ затѣмъ $a=0$ и находитъ

$$s=\frac{1}{6}\,gt^2.$$

Въ заключеніе авторъ указываетъ, что ур. (1) получается также, если воспользоваться уравненіемъ:

$$ss' = (s + s'dt)(s' + \delta s'),$$

гдѣ $s' = \frac{ds}{dt}$, затѣмъ прибавить членъ $gs.dt$ и подставить $\frac{d^2s}{dt^2}dt$ вмѣсто $\delta s'$.

Двѣнадцать лѣтъ спустя, A. Cayley возвращается къ тѣмъ же задачамъ, которыя онъ называетъ теперь „problems of continuous impulse".

Въ журналѣ „Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics", vol. V, 1869 года, мы находимъ подъ общимъ названіемъ: „A „Smith's prize" paper", p. 40, слѣдующую задачу, предложенную и рѣшенную A. Cayley (№ 6, pp. 48—49) *): *масса M, прикрѣпленная къ концу A цѣпи AC, помѣщена вмѣстѣ съ цѣпью на горизонтальной плоскости такимъ образомъ, что часть AB цѣпи расположена по прямой линіи, остальная же часть BC свернута у точки B; массѣ M сообщена нѣкоторая скорость въ направленіи отъ B къ A; двигаясь затѣмъ прямолинейно, масса M тянетъ за собою цѣпь; требуется опредѣлить движеніе и выяснить особенность задачи.*

Пусть m масса единицы длины цѣпи, a начальная длина AC и $a + x$ длина AC въ моментъ t.

Обозначимъ чрезъ v скорость движенія въ моментъ t и чрезъ R величину импульса въ этотъ моментъ; тогда

$$[M + m(a + x)]\,dv = -R$$
$$mv.dt.v = R,$$

отсюда

$$[M + m(a + x)]\,dv + mv^2dt = 0, \ldots\ldots\ (2)$$

но

$$vdt = dx,$$

*) «The collected Mathematical Papers of Arthur Cayley», vol. VIII, № 581, pp. 445—446.

слѣдовательно,

$$(M+ma)\,dv+m\,d(xv)=0;$$

находимъ такимъ образомъ

$$[M+m\,(a+x)]\,v=(M+ma)\,V, \quad \ldots\ldots (3)$$

гдѣ V начальная скорость.

Интегрируя еще разъ, получаемъ

$$(M+ma)\,x+\frac{1}{2}\,mx^2=(M+ma)\,Vt,$$

откуда, полагая $x=l-a$, опредѣляемъ тотъ моментъ, въ который вся цѣпь приходитъ въ движеніе; далѣе она движется съ постоянною скоростью.

Авторъ замѣчаетъ, что ур. (3) можно было бы получить сразу, пользуясь постоянствомъ момента количества движенія системы, но онъ находитъ, что изложенный методъ дѣлаетъ болѣе яснымъ особенный характеръ разсматриваемой задачи, какъ „задачи съ непрерывными импульсами“.

3. Въ небесной механикѣ вопросъ о вліяніи непрерывнаго измѣненія массы на движеніе былъ поднятъ въ 1866 году; — здѣсь онъ тѣсно связанъ съ вопросомъ о вѣковомъ ускореніи долготы луны.

Это неравенство, представляющее характерную особенность движенія луны, открыто въ концѣ семнадцатаго вѣка Галлеемъ; величина соотвѣтствующаго коэффиціента вѣкового ускоренія долготы луны опредѣлялась изъ имѣвшихся наблюденій затмѣній различными учеными, начиная съ Дюнтгорна (1749 г.), который получилъ 10″, принявши столѣтіе за единицу времени, и кончая Ганзеномъ (1864 г.), который нашелъ 12″ и даже 13″.

Теоретическое объясненіе этого неравенства дано впервые Лапласомъ; разсматривая ускореніе средняго движенія луны, какъ слѣдствіе уменьшенія эксцентриситета земной орбиты, Лапласъ получилъ для коэффиціента ускоренія 10″; но Адамсъ указалъ, что это число должно быть уменьшено до 6″, и, дѣйствительно, болѣе точныя вы-

численія Делоне (1859 г.) дали только 6",11, слѣдовательно, приблизительно на 6" меньше того числа, которое получилось изъ наблюденій; Делоне объяснялъ эту разницу вліяніемъ приливовъ и отливовъ.

Находя, что такимъ образомъ можетъ быть объяснена только часть полученной разницы, Дюфуръ въ 1866 году въ статьѣ: „*Sur l'accélération séculaire du mouvement de la lune*“ par Ch. Dufour (Comptes rendus des Séances de l'Ac. des Sc., t. LXII, pp. 840—842) обращаетъ вниманіе на непрерывное возрастаніе массы земли вслѣдствіе паденія метеоритовъ, которое должно производить ускореніе въ среднемъ движеніи луны и, слѣдовательно, можетъ служить для объясненія части найденной величины этого ускоренія.

Дюфуръ указываетъ на то, что массу земли увеличиваютъ не только тѣ метеориты, которые падаютъ на нее въ видѣ аэролитовъ, но и тѣ, которые сгораютъ или разсыпаются въ атмосферѣ; изъ приближенныхъ вычисленій онъ находитъ, что для того, чтобы произвести ускореніе въ движеніи луны равное 6", количество метеорной пыли, приходящееся въ годъ на поверхность Франціи, должно занимать объемъ около 0,1 куб. километра при плотности, равной $^2/_8$ плотности земли.

Въ 1884 г. Оппольцеръ помѣстилъ въ „Astronomische Nachrichten“, Bd. 108, № 2573, стр. 67—72, статью: „*Ueber eine Ursache, welche den Unterschied zwischen der theoretisch berechneten Secularacceleration in der Länge des Mondes und der thatsächlichen bedingen kann*“; какъ причина вѣкового ускоренія луны здѣсь разсматривается возрастаніе массъ земли и луны; авторъ опредѣляетъ съ довольно грубымъ приближеніемъ то измѣненіе долготы луны, которое должно происходить вслѣдствіе осѣданія метеорной пыли на поверхности какъ земли, такъ и луны; онъ находитъ, что это измѣненіе есть ускореніе и соотвѣтствующій коеффиціентъ равенъ 5", если количество метеорной пыли, падающей на землю въ теченіе столѣтія, образуетъ слой толщиною въ 2,8 mm., принимая плотность его равною средней плотности земли.

Вслѣдъ за статьей Оппольцера въ томъ же 1884 году въ „Astronomische Nachrichten“ появилась статья Гильдена: *„Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Körpern in dem Falle, dass die Massen Veränderungen unterworfen sind“*. (Bd. 109, № 2593, стр. 1—6).

Предметъ статьи Гильдена составляетъ задача объ относительномъ движеніи двухъ точекъ, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, въ томъ случаѣ, когда массы точекъ выражаются данными функціями времени.

Авторъ допускаетъ, что дифференціальныя уравненія относительнаго движенія одной точки по отношенію къ другой могутъ быть написаны въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu_1 + F(t)}{r^3} \cdot x = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu_1 + F(t)}{r^3} \cdot y = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

гдѣ μ_1 величина постоянная, и далѣе занимается интегрированіемъ этихъ уравненій; онъ приводитъ ур. (4) къ виду:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1}{\rho^3}\xi = 0 \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{\mu_1}{\rho^3}\eta = 0, \end{aligned}\right. \qquad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2$$

полагая:

$$x = \frac{\xi}{1 + \psi(\tau)}, \quad y = \frac{\eta}{1 + \psi(\tau)}, \quad dt = \frac{d\tau}{[1 + \psi(\tau)]^2},$$

гдѣ

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\xi\frac{d\eta}{d\tau} - \eta\frac{d\xi}{d\tau}}\left[\eta\int\frac{\xi F(t)}{\rho^3}\,d\tau - \xi\int\frac{\eta F(t)}{\rho^3}\,d\tau\right] \ldots (5)$$

Такъ какъ въ формулѣ (5) выраженіе $F(t)$ въ функціи отъ перемѣнной τ остается неизвѣстнымъ, то указываемый методъ, вообще говоря, можетъ служить только для приближеннаго интегрированія

ур. (4), пользуясь тѣмъ, что въ теченіе разсматриваемаго промежутка времени функція $F(t)$ имѣетъ весьма малыя значенія.

Гильденъ примѣняетъ этотъ методъ къ случаю, когда $F(t) = \gamma t$, гдѣ γ величина постоянная, и приходитъ къ заключенію, что, при равномѣрномъ возрастаніи массъ солнца и планеты, планета должна упасть на солнце.

Болѣе подробное развитіе вопроса, которымъ занимался Оппольцеръ, мы находимъ въ статьѣ проф. Зелигера: „*Ueber Zusammenstösse und Theilungen planetarischer Massen*" *von H. Seeliger* (Abhandlungen der König. Bayerische Akademie der Wissenschaften, Cl. II, Bd. XVII, Abth. II, стр. 459—490, 1890 г.).

Проф. Зелигеръ прежде всего составляетъ дифференціальныя уравненія движенія планеты подъ вліяніемъ притяженія солнца, принимая во вниманіе непрерывное паденіе на нее весьма малыхъ массъ изъ встрѣчающихся метеорныхъ потоковъ.

Пусть m перемѣнная масса планеты, такъ что

$$m = m_0 + \Delta m = m_0 + \int_{t_0}^{t} \mu\, dt;$$

обозначимъ чрезъ $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ проекціи скорости центра инерціи тѣхъ малыхъ массъ, которыя въ моментъ t присоединяются къ планетѣ; тогда уравненія разсматриваемаго движенія представляются въ видѣ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{dx}{dt}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

эти уравненія авторъ примѣняетъ къ движенію земли.

Пользуясь тѣмъ, что даютъ работы Скіапарелли и Гёка относительно движенія метеоритовъ, онъ находитъ приближенныя выраженія для проекцій возмущающей силы, которая является вслѣдствіе паденія метеоритовъ:

$$X = -k^2.\Delta m.\frac{x}{r^3} + \frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{dx}{dt}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Предполагая, что земля движется по окружности, проф. Зелигеръ получаетъ для коэффиціента вѣкового измѣненія средней долготы земли вслѣдствіе возмущающей силы весьма малую величину 0",12, если принять, что радіусъ земли возрастаетъ на 1 mm. въ столѣтіе.

Выводы, сдѣланные для земли, проф. Зелигеръ распространяетъ на случай луны и находитъ выраженія для проекцій возмущающей силы въ относительномъ движеніи луны по отношенію къ землѣ; онъ допускаетъ затѣмъ, что относительная траекторія луны окружность, что метеорная масса, падающая въ единицу времени на единицу поверхности луны и земли, одинакова; тогда получается, что вѣковое ускореніе долготы луны вслѣдствіе паденія метеоритовъ почти въ шесть разъ болѣе того, которое опредѣлено Оппольцеромъ, такъ что для объясненія разницы въ 5" между наблюденной и теоретической величиной коэффиціента этого ускоренія достаточно возрастаніе радіуса земли на 0,5 mm. въ столѣтіе.

Далѣе проф. Зелигеръ переходитъ къ движенію кометы и даетъ приближенныя выраженія проекцій возмущающей силы, которая является вслѣдствіе непрерывныхъ встрѣчъ кометы съ метеорными потоками, а также и вслѣдствіе истеченія кометной массы къ солнцу.

Нѣкоторое дополненіе къ вышеупомянутой статьѣ Гильдена, представляетъ моя замѣтка, напечатанная въ 1893 году: *„Ein Specialfall des Gyldén'schen Problems (A. N. 2593)“*. (Astr. Nachr., Bd. 132, № 3153, стр. 129—130).

Въ этой замѣткѣ указанъ частный случай задачи Гильдена, въ которомъ дифференціальныя уравненія движенія интегрируются въ квадратурахъ, — именно, когда въ ур. (4)

$$\mu_1 + F(t) = \frac{1}{a + \alpha t},$$

гдѣ a и α суть постоянныя; ур. (4) приводятся тогда къ виду:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\xi}{\rho^3} = 0$$

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{\eta}{\rho^3} = 0,$$

полагая

$$\xi = \frac{x}{a + \alpha t}, \quad \eta = \frac{y}{a + \alpha t}, \quad \tau = \frac{1}{\alpha (a + \alpha t)} \ldots \ldots (6)$$

Изъ формулъ (6) слѣдуетъ, между прочимъ, что, если точка (ξ, η) описываетъ эллипсъ, то точка (x, y) движется по спирали, приближаясь къ началу координатъ при $\alpha < 0$ и удаляясь отъ него при $\alpha > 0$.

Разсматривается затѣмъ болѣе общій случай, когда имѣется система n точекъ, къ которымъ приложены силы взаимодѣйствія и силы, исходящія изъ начала координатъ, — тѣ и другія пропорціональны массамъ точекъ и s-й степени разстояній; дифференціальныя уравненія движенія этой системы, когда въ нихъ массы точекъ и коэффиціентъ въ выраженіяхъ силъ, исходящихъ изъ начала координатъ, суть функціи времени вида

$$\varkappa_i (a + \alpha t)^{-s-3} \; (i = 0, 1, 2, \ldots n),$$

приводятся къ случаю, когда всѣ эти величины суть постоянныя равныя $\varkappa_i$, если вмѣсто декартовыхъ координатъ точекъ системы и t ввести новыя перемѣнныя: ξ, η, ζ, τ по формуламъ вида (6).

Въ заключеніе этого очерка литературы вопроса можно привести одно мѣсто изъ лекцій Кирхгоффа: *„Vorlesungen über Mathematische Physik, Mechanik“*, которое позволяетъ думать, что Кирхгоффъ считалъ возможнымъ разсматривать движеніе точекъ съ перемѣнными массами.

Во второй лекціи, говоря о дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія системы:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \frac{\lambda}{m_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\mu}{m_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \ldots,$$

. . . .

на стр. 22-й (3-е изд. 1883 г.) Кирхгоффъ замѣчаетъ: „die Gleichungen verlieren sie auch nicht, wenn man die Grössen m_1, m_2, ... nicht als constant, sondern als beliebig veränderlich annimmt“; но онъ не дѣлаетъ этого обобщенія, такъ какъ „оно не упрощаетъ описанія движеній“, — мы уже видѣли, что есть случаи, въ которыхъ такое обобщеніе оказывается полезнымъ.

ГЛАВА I.

УРАВНЕНІЯ ДВИЖЕНІЯ ТВЕРДАГО ТѢЛА ПЕРЕМѢННОЙ МАССЫ.

§ 1. Общая задача о движеніи тѣла перемѣнной массы.

Процессъ измѣненія массы тѣла можно разсматривать, вообще говоря, или какъ присоединеніе къ тѣлу новыхъ частицъ, или какъ отдѣленіе нѣкоторыхъ частицъ тѣла, или какъ оба эти явленія, совершающіяся одновременно, причемъ присоединеніе къ тѣлу новыхъ частицъ понимаемъ въ томъ смыслѣ, что онѣ принимаютъ такое же участіе въ движеніи тѣла, какъ если бы это были частицы самаго тѣла.

Въ механикѣ тѣло разсматривается, какъ система матеріальныхъ точекъ, связанныхъ нѣкоторыми связями; пусть тѣло, движеніе котораго насъ интересуетъ, будетъ система **A**.

При измѣненіи массы тѣла, частицы, присоединяющіяся къ тѣлу, можемъ разсматривать какъ матеріальныя точки, вступающія на связи системы **A**; до момента присоединенія онѣ принадлежали нѣкоторымъ системамъ: **B**, **C**, ...; частицы отдѣляющіяся можемъ разсматривать какъ матеріальныя точки, которыя разрываютъ связи, обусловливающія ихъ принадлежность системѣ **A**, и переходятъ въ нѣкоторыя системы: B_1, C_1, . . .

Такимъ образомъ движенія этихъ системъ связаны между собою, и, слѣдовательно, мы можемъ соединить ихъ въ одну систему **P**.

Въ системѣ **P** измѣненія массы не происходитъ, слѣдовательно, рѣшеніе задачи о движеніи этой системы входитъ въ область динамики постоянныхъ массъ.

Опредѣливши движеніе системы P, мы будемъ знать и движеніе интересующаго насъ тѣла.

Но движеніе матеріальныхъ точекъ до присоединенія ихъ къ тѣлу или послѣ отдѣленія отъ него (для краткости можемъ называть эти точки *„измѣняющими“*) само по себѣ насъ не интересуетъ; поэтому мы ограничиваемся разсмотрѣніемъ тѣхъ случаевъ, въ которыхъ *на движеніе тѣла при дѣйствіи данныхъ силъ вліяютъ только массы, положенія и скорости измѣняющихъ матеріальныхъ точекъ въ тотъ моментъ, когда онѣ присоединяются къ тѣлу или отдѣляются отъ него, а также и силы, къ нимъ приложенныя, когда онѣ находятся въ соединеніи съ тѣломъ.*

Поставленная такимъ образомъ задача о движеніи тѣла перемѣнной массы упрощается, если массы, положенія и скорости измѣняющихъ точекъ извѣстны для каждаго положенія тѣла.

Если матеріальныя точки, принадлежащія разсматриваемой системѣ, не измѣняютъ взаимныхъ разстояній, то мы называемъ такую систему твердымъ тѣломъ; нѣкоторыя матеріальныя точки могутъ отдѣлиться отъ разсматриваемой системы, слѣдовательно, разстоянія ихъ отъ остальныхъ точекъ тогда измѣнятся, но съ момента отдѣленія эти „измѣняющія“ точки уже не принадлежатъ системѣ; нѣкоторыя матеріальныя точки могутъ присоединиться къ разсматриваемой системѣ, но онѣ принадлежатъ системѣ только съ момента своего присоединенія, а тогда онѣ удовлетворяютъ вышеупомянутому условію; мы приходимъ такимъ образомъ къ понятію *о твердомъ тѣлѣ перемѣнной массы*, движеніе котораго мы и будемъ далѣе разсматривать, предполагая, что масса тѣла остается конечною и неравною нулю во все время движенія.

§ 2. Опредѣленіе движенія твердаго тѣла, масса котораго измѣняется чрезъ извѣстные промежутки времени.

Измѣненіе массы тѣла происходитъ въ моменты, отдѣленные другъ отъ друга нѣкоторыми промежутками, и притомъ каждый разъ, по предположенію, мгновенно.

Въ теченіе какого-либо изъ этихъ промежутковъ, движеніе тѣла, при дѣйствіи приложенныхъ къ нему силъ, опредѣляется, какъ движеніе твердаго тѣла постоянной массы при тѣхъ данныхъ, которыя соотвѣтствуютъ началу промежутка; въ концѣ промежутка масса тѣла измѣняется вслѣдствіе того, что, вообще говоря, однѣ части тѣла отдѣляются, другія къ нему присоединяются; при этомъ вообще происходитъ рядъ ударовъ, въ продолженіе которыхъ массы соударяющихся тѣлъ остаются постоянными; мгновенныя силы взаимодѣйствія, развивающіяся при каждомъ ударѣ, и производятъ то, что въ концѣ удара измѣняющая часть или находится въ соединеніи съ тѣломъ, или удаляется отъ него съ нѣкоторою скоростью.

Опредѣляемъ измѣненную массу разсматриваемаго тѣла, положеніе центра инерціи, моменты и произведенія инерціи, поступательную и угловую скорость тѣла послѣ измѣненія массы.

Найденныя величины суть начальныя данныя для слѣдующаго промежутка, въ теченіе котораго движеніе тѣла опредѣляется какъ движеніе твердаго тѣла постоянной массы; въ концѣ промежутка происходитъ рядъ ударовъ; разсчитываемъ результаты этихъ ударовъ, затѣмъ опредѣляемъ движеніе тѣла въ слѣдующій промежутокъ и т. д.

Такимъ образомъ здѣсь для опредѣленія движенія тѣла перемѣнной массы мы послѣдовательно примѣняемъ то, что уже входитъ въ область динамики постоянныхъ массъ, именно, дифференціальныя уравненія движенія и разсчетъ ударовъ твердыхъ тѣлъ.

§ 3. Примѣръ: вертикальное движеніе аеростата при выбрасываніи балласта.

Для примѣра разсмотримъ подъемъ и спускъ аеростата.

Массою аеростата мы называемъ сумму массъ: газа, заключеннаго въ оболочкѣ, самой оболочки и всей нагрузки, которую несетъ оболочка.

Существуютъ различныя причины, измѣняющія массу аеростата; мы примемъ въ разсчетъ одну изъ нихъ, именно выбрасываніе балласта, и будемъ предполагать, что аеростатъ движется поступательно.

Пусть въ начальный моментъ $t=0$ и масса аеростата M; ось

Ox направимъ по вертикали вверхъ, чрезъ x обозначимъ разстояніе отъ земли одной изъ точекъ, неизмѣнно связанныхъ съ аэростатомъ во все время его движенія.

I. Разсматриваемъ сначала *восходящее движеніе аеростата* послѣ момента $t = 0$, предполагая, что начальныя значенія: $x = x_0$ и $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$.

Пусть

$x_1, x_2, x_3 \dots$ будутъ значенія x для тѣхъ положеній аеростата, въ которыхъ выбрасывается балластъ;

$m_1, m_2, m_3 \dots$ соотвѣтствующія массы выбрасываемаго балласта;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ ихъ относительныя скорости, направленныя внизъ;

P подъемная сила аеростата, равная вѣсу вытѣсненнаго объема воздуха;

G ускореніе вслѣдствіе притяженія земли;

K коеффиціентъ сопротивленія воздуха.

Предполагаемъ, что сопротивленіе воздуха пропорціонально квадрату скорости, а P, G и K данныя функціи отъ x.

Уравненіе движенія будетъ

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = P - MG - K\,x'^2, \dots\dots\dots \quad (1)$$

гдѣ

$$P - MG > 0.$$

Обозначимъ чрезъ $\varkappa$ одно какое-либо изъ значеній интеграла

$$\int 2\,K\,dx = \varkappa,$$

и пусть при постоянномъ значеніи μ

$$\int (P - \mu G)\,e^{\frac{\varkappa}{\mu}}.\,dx = F(\mu, x), \dots\dots\dots \quad (2)$$

тогда первый интегралъ ур. (1) будетъ

$$\frac{1}{2}\,M\,e^{\frac{\varkappa}{M}}.\,x'^2 = F(M, x) - F(M, x_0) \dots\dots \quad (3)$$

Полагая въ ур. (3) $x'=0$, найдемъ значеніе $x=h_1$, соотвѣтствующее наибольшей высотѣ поднятія.

Должно быть $x_1 \leqslant h_1$, тогда изъ ур. (3), полагая $x=x_1$, опредѣляемъ скорость аэростата въ тотъ моментъ, когда выбрасывается масса m_1; обозначимъ эту скорость чрезъ x'_1.

Въ положеніи $x=x_1$ количество движенія массы M до выбрасыванія балласта должно быть равно суммѣ количествъ движенія массъ $M-m_1$ и m_1 послѣ выбрасыванія, ибо возникающія при выбрасываніи силы суть силы внутреннія; обозначимъ чрезъ a_1 скорость аэростата послѣ того, какъ будетъ выброшена масса m_1, тогда

$$Mx'_1=(M-m_1)\,a_1+m_1\,(x'_1-a_1),$$

слѣдовательно,

$$a_1=x'_1+\frac{m_1}{M-m_1}\,a_1.$$

Дальнѣйшее движеніе аэростата выражается уравненіемъ

$$(M-m_1)\frac{d^2x}{dt^2}=P-(M-m_1)\,G-Kx'^2; \quad \ldots\ldots(1_1)$$

скорость опредѣляется изъ уравненія:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}(M-m_1)\left(e^{\frac{\varkappa}{M-m_1}}.x'^2-e^{\frac{\varkappa_1}{M-m_1}}.a_1^2\right)= \\ \quad =F(M-m_1,\,x)-F(M-m_1,\,x_1),\end{array}\right\}\ldots(3_1)$$

гдѣ $\varkappa_1$ есть значеніе $\varkappa$ при $x=x_1$.

Если обозначимъ чрезъ h_2 значеніе x, которое получается изъ ур. (3_1) при $x'=0$, то должно быть $x_2 \leqslant h_2$; полагая $x=x_2$ въ ур. (3_1), найдемъ скорость x'_2, при которой выбрасывается масса m_2.

Скорость аэростата послѣ выбрасыванія массы m_2 будетъ

$$a_2=x'_2+\frac{m_2}{M-m_1-m_2}\,a_2.$$

Вообще, послѣ того, какъ балластъ будетъ выброшенъ n разъ, движеніе аэростата выразится уравненіемъ:

$$\left(M-\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\frac{d^2x}{dt^2}=P-\left(M-\sum_{i=1}^{n} m_i\right)G-Kx'^2,$$

причемъ можетъ быть

$$P-\left(M-\sum_{i=1}^{n} m_i\right)G<0.$$

Скорость въ этомъ движеніи опредѣляется изъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(M-\sum_{1}^{n} m_i\right)\left(e^{\frac{\varkappa}{M-\Sigma m_i}}\,.\,x'^2-e^{\frac{\varkappa_n}{M-\Sigma m_i}}\,.\,a_n^2\right)=\\=F\left(M-\sum_{1}^{n} m_i, x\right)-F\left(M-\sum_{1}^{n} m_i, x_n\right),\end{aligned}\right\}\,.(3_n)$$

гдѣ $\varkappa_n$ есть значеніе $\varkappa$ при $x=x_n$ и

$$a_n=x'_n+\frac{m_n}{M-\sum\limits_{1}^{n} m_i}\,\alpha_n.$$

Такимъ образомъ послѣдовательно опредѣляемъ скорость аэростата; значеніе x, соотвѣтствующее наибольшей высотѣ подъема послѣ n выбрасываній, опредѣляется изъ ур. (3_n), полагая $x'=0$.

Имѣя выраженія x' чрезъ x, мы можемъ для каждой части пути выразить x посредствомъ квадратуры въ функціи отъ t.

Въ частномъ случаѣ, когда $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3\ldots.=0$, скорость аэростата не измѣняется въ моментъ измѣненія массы.

Полагая $G=g$, $K=k$, $P=p-qx$, гдѣ g, k, p и q величины постоянныя, будемъ имѣть:

$$F(\mu, x)=\frac{\mu}{2k}\,e^{\frac{2k}{\mu}x}\left(p-qx-\mu g+\frac{\mu q}{2k}\right).$$

II. Разсмотримъ теперь *нисходящее движеніе аеростата.*

Пусть $\dot{M}$ масса аеростата въ тотъ моментъ, когда онъ, достигнувъ высоты, для которой $x=h$, начинаетъ опускаться; при этомъ функціи отъ x, выражающія подъемную силу и коеффиціентъ сопротивленія, вообще говоря, измѣняютъ свой видъ, — обозначимъ ихъ чрезъ $\dot{P}$ и $\dot{K}$.

Уравненіе движенія будетъ

$$\dot{M}\frac{d^2x}{dt^2}=\dot{P}-\dot{M}G+\dot{K}x'^2, \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

гдѣ

$$\dot{P}-\dot{M}G<0.$$

Обозначимъ черезъ $\dot{\varkappa}$ одно какое-либо изъ значеній интеграла

$$\int 2\dot{K}\,dx=\dot{\varkappa},$$

и пусть при постоянномъ значеніи μ

$$\int(\dot{P}-\mu G)e^{-\frac{\dot{\varkappa}}{\mu}}dx=\Phi(\mu, x),$$

тогда, интегрируя ур. (4), получаемъ для опредѣленія скорости уравненіе:

$$\frac{1}{2}\dot{M}e^{-\frac{\dot{\varkappa}}{\dot{M}}}.x'^2=\Phi(\dot{M}, x)-\Phi(\dot{M}, h). \ldots\ldots\ldots (5)$$

Пусть при $x=\dot{x}_1$, гдѣ $\dot{x}\lessgtr h$, выбрасывается балластъ, масса котораго есть $\dot{m}_1$, съ относительною скоростью $\dot{\alpha}_1$ ($\dot{\alpha}_1\geqslant 0$), направленною внизъ.

Въ положеніи $x=\dot{x}_1$ производная $\frac{dx}{dt}$ имѣетъ отрицательное значеніе, которое мы обозначимъ чрезъ $\dot{x}'_1$;—оно получается изъ ур. (5), полагая $x=\dot{x}_1$.

Для опредѣленія скорости $\dot{a}_1$ аеростата послѣ выбрасыванія массы $\dot{m}_1$ имѣемъ уравненіе:

$$\dot{M}\dot{x}'_1=(\dot{M}-\dot{m}_1)\,\dot{a}_1+\dot{m}_1\,(\dot{x}'_1-\dot{\alpha}_1),$$

откуда

$$\dot{a}_1 = \dot{x}_1 + \frac{\dot{m}_1}{\dot{M}-\dot{m}_1}\dot{\alpha}_1;$$

когда $\dot{\alpha}_1$ не равно нулю, по абсолютной величинѣ $(\dot{a}_1) < (\dot{x}'_1)$.

Если $\dot{a}_1 > 0$, то аеростатъ снова начинаетъ подниматься, и для опредѣленія движенія мы должны пользоваться формулами, которыя выведены для восходящаго движенія.

Если $\dot{a}_1 = 0$, аеростатъ поднимается, когда $\dot{P} - (\dot{M}-\dot{m}_1)G > 0$ при $x = \dot{x}_1$; въ противномъ случаѣ опускается.

Если $\dot{a}_1 < 0$, аеростатъ опускается, но если $\dot{P} - (\dot{M}-\dot{m}_1)G > 0$ при $x = \dot{x}_1$, то величина скорости уменьшается, и, если она обратится въ нуль раньше, чѣмъ разность $\dot{P} - (\dot{M}-\dot{m}_1)G$, то аеростатъ начнетъ затѣмъ подниматься.

Предполагая, что аеростатъ опускается, мы имѣемъ уравненіе движенія:

$$(\dot{M}-\dot{m}_1)\frac{d^2x}{dt^2} = \dot{P} - (\dot{M}-\dot{m}_1)\,G + \dot{K}x'^2;$$

скорость опредѣляется изъ уравненія:

$$\frac{1}{2}(\dot{M}-\dot{m}_1)\left(e^{-\frac{\dot{\varkappa}}{\dot{M}-\dot{m}_1}} . x'^2 - e^{-\frac{\dot{\varkappa}_1}{\dot{M}-\dot{m}_1}} . a_1^2\right) =$$
$$= \Phi(\dot{M}-\dot{m}_1, x) - \Phi(\dot{M}-\dot{m}_1, \dot{x}_1),$$

гдѣ $\dot{\varkappa}_1$ есть значеніе $\varkappa$ при $x = \dot{x}_1$.

Если при $x = \dot{x}_2$ выбрасывается масса m_2 съ относительною скоростью $\dot{\alpha}_2$, направленною внизъ, то мы, подставивши въ предыдущее уравненіе $x = \dot{x}_2$, найдемъ соотвѣтствующее значеніе $x' = \dot{x}'_2$, а затѣмъ опредѣлимъ скорость аеростата послѣ выбрасыванія:

$$\dot{a}_2 = \dot{x}'_2 + \frac{\dot{m}_2}{\dot{M}-\dot{m}_1-\dot{m}_2}\dot{\alpha}_2, \text{ и т. д.}$$

Имѣя выраженіе для x' въ функціи отъ x, мы можемъ для каждой части движенія выразить x въ функціи отъ t чрезъ квадратуру.

§ 4. Непрерывное измѣненіе массы тѣла.

Обратимся къ тому случаю, когда промежутки, раздѣляющіе моменты измѣненія массы и соотвѣтствующія имъ положительныя или отрицательныя приращенія массы настолько малы, что измѣненіе массы тѣла представляется намъ, какъ процессъ, *непрерывно* совершающійся съ теченіемъ времени; мы говоримъ, что въ этомъ случаѣ *масса тѣла измѣняется непрерывно.*

Разсматривая движеніе твердаго тѣла при непрерывномъ измѣненіи массы, мы предполагаемъ:

1) форма и объемъ тѣла измѣняются непрерывно, слѣдовательно, непрерывно измѣняются: положеніе центра инерціи, моменты и произведенія инерціи тѣла;

2) скорости измѣняющихъ точекъ или остаются постоянными или непрерывно измѣняются съ теченіемъ времени;

3) проекціи главнаго вектора и главнаго момента силъ, на тѣло дѣйствующихъ, во все время, пока движеніе тѣла разсматривается, выражаются однѣми и тѣми же функціями времени, положенія тѣла, его поступательной и угловой скорости; такъ, напримѣръ, если къ тѣлу, подверженному дѣйствію силы тяжести, присоединяются до нѣкотораго момента t_1 тяжелыя частицы, на которыя дѣйствуютъ силы магнитныя, а послѣ момента t_1 частицы, подверженныя дѣйствію только силы тяжести, тогда разсмотрѣніе движенія тѣла мы раздѣляемъ на двѣ части: до момента t_1 и послѣ момента t_1.

Скорости измѣняющихъ точекъ, вообще говоря, отличаются по величинѣ и направленію отъ скоростей тѣхъ точекъ, неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ, съ которыми онѣ въ моментъ своего присоединенія къ тѣлу или отдѣленія отъ него совпадаютъ; поэтому въ общемъ случаѣ при измѣненіи массы тѣло испытываетъ *удары* со стороны измѣняющихъ точекъ; если масса измѣняется непрерывно, то дѣйствіе такихъ ударовъ на тѣло можетъ быть замѣнено нѣкоторой системой непрерывно дѣйствующихъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу; эти силы будемъ называть „*прибавочными силами*“.

§ 5. Уравненія движенія твердаго тѣла перемѣнной массы при отсутствіи ударовъ.

Разсмотримъ случай, когда измѣняющія точки въ моментъ присоединенія къ тѣлу или отдѣленія отъ него имѣютъ тѣ же скорости, которыя онѣ имѣли бы въ этотъ моментъ, еслибъ принадлежали тѣлу; — тогда при измѣненіи массы не происходитъ ударовъ.

Предполагаемъ, что масса тѣла, моменты и произведенія инерціи, а также относительныя координаты центра инерціи по отношенію къ осямъ, связаннымъ съ тѣломъ, выражаются нѣкоторыми функціями *) времени, положенія тѣла, его поступательной и угловой скорости и, вообще говоря, длины путей, пройденныхъ нѣкоторыми точками тѣла.

Въ разсматриваемомъ случаѣ дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла перемѣнной массы, отнесенныя къ осямъ, связаннымъ съ тѣломъ и проведеннымъ чрезъ нѣкоторую точку, во все время движенія принадлежащую тѣлу, имѣютъ тотъ же видъ, что и для тѣла постоянной массы:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d\alpha_0}{dt}+\zeta\frac{dq}{dt}-\eta\frac{dr}{dt}=r\beta_0-q\gamma_0+(q^2+r^2)\,\xi-pq\eta-pr\zeta+\frac{1}{M}B_\xi, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
M\left(\eta\frac{d\gamma_0}{dt}-\zeta\frac{d\beta_0}{dt}\right)+A\frac{dp}{dt}-E\frac{dr}{dt}-F\frac{dq}{dt}=M\,[\eta\,(\alpha_0 q-\beta_0 p)+ \\
+\zeta\,(\alpha_0 r-\gamma_0 p)]+(B-C)\,qr+D\,(q^2-r^2)+Epq-Fpr+L_\xi, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\}\text{(I)}$$

остальныя четыре уравненія получаются изъ уравненій написанныхъ посредствомъ круговой замѣны буквъ; буквы, входящія въ эти уравненія, обозначаютъ:

*) Эти функціи, равно какъ и функціи, выражающія проекціи главнаго вектора и главнаго момента силъ, предполагаются *конечными* и *непрерывными* во все время, пока движеніе тѣла разсматривается.

$\alpha_0\ \beta_0\ \gamma_0$ . . . проекціи скорости начала координатъ,
$p\ q\ r$ . . . проекціи угловой скорости тѣла,
$\xi\ \eta\ \zeta$ . . . координаты центра инерціи,
$MABCDEF$ . . . массу, моменты и произведенія инерціи тѣла относительно координатныхъ осей,
$B_\xi B_\eta B_\zeta$. . . проекціи главнаго вектора силъ и реакцій связей,
$L_\xi L_\eta L_\zeta$. . . проекціи главнаго момента силъ и реакцій относительно начала координатъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ τ_1, τ_2, τ_3, ... тѣ слѣдующіе за начальнымъ моментомъ весьма малые промежутки времени, въ концѣ которыхъ происходитъ измѣненіе массы.

Движеніе тѣла въ теченіе промежутка τ_1 выражается ур. (I), въ которыхъ величины: $M, A, B, C, D, E, F, \xi, \eta, \zeta$ имѣютъ постоянныя значенія, соотвѣтствующія начальному моменту; въ концѣ промежутка τ_1 масса M и, вообще говоря, A, B, ... ζ получаютъ приращенія порядка малости τ_1, могутъ также измѣниться главный векторъ и главный моментъ силъ и реакцій, но положеніе тѣла, его поступательная и угловая скорость остаются при этомъ тѣ самыя, которыя слѣдуютъ изъ ур. (I) и начальныхъ данныхъ, такъ какъ, по предположенію, измѣненіе массы въ концѣ каждаго промежутка происходитъ мгновенно и при томъ тѣло не испытываетъ ударовъ.

Положеніе тѣла, его поступательная и угловая скорость въ концѣ τ_1 будутъ начальными для движенія тѣла въ теченіе промежутка τ_2; это движеніе выражается также ур. (I), въ которыхъ величины M, A, B, ... ζ имѣютъ постоянныя значенія, полученныя ими въ концѣ τ_1 послѣ измѣненія массы и, слѣдовательно, соотвѣтствующія началу τ_2; въ концѣ промежутка τ_2 измѣняются: величины M, A, B, . . . ζ, главный векторъ и главный моментъ силъ и реакцій, но не измѣняются: положеніе тѣла, его поступательная и угловая скорость, которыя и послужатъ начальными данными для движенія тѣла въ слѣдующій промежутокъ τ_3; это движеніе выражается ур. (I), въ которыхъ M, A, B, ... ζ имѣютъ постоянныя значенія, соотвѣтствующія началу τ_3, и т. д.

Считая промежутки $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ безконечно малыми, мы приходимъ къ заключенію, что при непрерывномъ измѣненіи массы, не сопровождаемомъ ударами, движеніе твердаго тѣла во все время, пока оно разсматривается, выражается одной и той же системой ур. (I), въ которыхъ M, A, $B, \ldots \zeta$ обозначаютъ равныя имъ функціи.

Замѣтимъ что предложеніе, высказанное въ настоящемъ параграфѣ, вытекаетъ изъ того обстоятельства, что обыкновенныя дифференціальныя уравненія вообще могутъ быть разсматриваемы, какъ **предѣльный случай уравненій разностныхъ**;—такой взглядъ мы встрѣчаемъ въ теоріи дифференціальныхъ уравненій, напримѣръ, при доказательствѣ существованія интеграловъ этихъ уравненій по первому способу **Коши** *).

Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ разностныя уравненія, соотвѣтствующія уравненіямъ (I).

Пусть будутъ: начальный моментъ t_0, послѣдующіе моменты:

$$t_1 = t_0 + \tau_1,\ t_2 = t_1 + \tau_2,\ \ldots\ldots\ t_n = t_{n-1} + \tau_n = t;$$

соотвѣтствующія этимъ моментамъ значенія перемѣнныхъ величинъ, входящихъ въ ур. (I), обозначимъ тѣми же буквами, что и самыя величины, только приставимъ къ нимъ значки: 0, 1, 2, ...; получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{0,1}-\alpha_{0,0}+\zeta_0(q_1-q_0)-\eta_0(r_1-r_0)=[r_0\,\beta_{0,0}-q_0\gamma_{0,0}+\\
&+(q^2{}_0+r^2{}_0)\,\xi_0-p_0q_0\eta_0-p_0r_0\zeta_0+\tfrac{1}{M_0}B_{\xi,0}]\,(t_1-t_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&M_0\,[\eta_0(\gamma_{0,1}-\gamma_{0,0})-\zeta_0(\beta_{0,1}-\beta_{0,0})]+A_0(p_1-p_0)-\\
&-E_0(r_1-r_0)-F_0(q_1-q_0)=\{M_0\,[\eta_0(\alpha_{0,0}\,q_0-\beta_{0,0}\,p_0)+\\
&+\zeta_0(\alpha_{0,0}\,r_0-\gamma_{0,0}\,p_0)]+(B_0-C_0)\,q_0r_0+D_0(q^2{}_0-r^2{}_0)+\\
&\qquad+E_0p_0q_0-F_0p_0r_0+L_{\xi,0}\}\,(t_1-t_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}.(\mathrm{I}_1)$$

---

*) См., напримѣръ, E. Picard, Traité d'analyse, t. II, ch. XI, «les équations différentielles comme limites d'une succession d'équations aux différences», p. 291.

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_{0,2}-\alpha_{0,1}+\zeta_1(q_2-q_1)-\eta_1(r_2-r_1)=[r_1\beta_{0,1}-q_1\gamma_{0,1}+\\
+(q^2_1+r^2_1)\xi_1-p_1q_1\eta_1-p_1r_1\zeta_1+\frac{1}{M_1}B_{\xi,1}](t_2-t_1),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
M_1[\eta_1(\gamma_{0,2}-\gamma_{0,1})-\zeta_1(\beta_{0,2}-\beta_{0,1})]+A_1(p_2-p_1)-\\
-E_1(r_2-r_1)-F_1(q_2-q_1)=\{M_1[\eta_1(\alpha_{0,1}q_1-\beta_{0,1}p_1)+\\
+\zeta_1(\alpha_{0,1}r_1-\gamma_{0,1}p_1)]+(B_1-C_1)q_1r_1+D_1(q^2_1-r^2_1)+\\
+E_1p_1q_1-F_1p_1r_1+L_{\xi,1}\}(t_2-t_1),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}.(I_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_0-\alpha_{0,n-1}+\zeta_{n-1}(q-q_{n-1})-\eta_{n-1}(r-r_{n-1})=\\
=[r_{n-1}\beta_{0,n-1}-q_{n-1}\gamma_{0,n-1}+\\
+(q^2_{n-1}+r^2_{n-1})\xi_{n-1}-p_{n-1}q_{n-1}\eta_{n-1}-p_{n-1}r_{n-1}\zeta_{n-1}+\\
+\frac{1}{M_{n-1}}B_{\xi,n-1}](t-t_{n-1}),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
M_{n-1}[\eta_{n-1}(\gamma_0-\gamma_{0,n-1})-\zeta_{n-1}(\beta_0-\beta_{0,n-1})]+\\
+A_{n-1}(p-p_{n-1})-E_{n-1}(r-r_{n-1})-F_{n-1}(q-q_{n-1})=\\
=\{M_{n-1}[\eta_{n-1}(\alpha_{0,n-1}q_{n-1}-\beta_{0,n-1}p_{n-1})+\\
+\zeta_{n-1}(\alpha_{0,n-1}r_{n-1}-\gamma_{0,n-1}p_{n-1})]+\\
+(B_{n-1}-C_{n-1})q_{n-1}r_{n-1}+D_{n-1}(q^2_{n-1}-r^2_{n-1})+\\
+E_{n-1}p_{n-1}q_{n-1}-F_{n-1}p_{n-1}r_{n-1}+L_{\xi,n-1}\}(t-t_{n-1}),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}.(I_n)$$

Имѣя въ виду уравненія движенія твердаго тѣла постоянной массы, мы замѣчаемъ слѣдующее:

ур. (I_1) опредѣляютъ поступательную и угловую скорость тѣла въ моментъ t_1, причемъ масса тѣла равна M_0;

ур. (I_2) опредѣляютъ поступательную и угловую скорость того же тѣла въ моментъ t_2, причемъ масса тѣла равна M_1 и, слѣдовательно, она претерпѣла измѣненіе въ моментъ t_1; и т. д.

ур. (I_n) опредѣляютъ поступательную и угловую скорость тѣла въ моментъ t, причемъ масса тѣла равна M_{n-1}.

Въ предѣльномъ случаѣ то движеніе твердаго тѣла, въ которомъ поступательная и угловая скорость тѣла въ моменты t_1, t_2, ... t опредѣляется уравненіями (I_1), (I_2), ... (I_n), и есть движеніе, нами разсматриваемое, именно движеніе, сопровождаемое измѣненіемъ массы при отсутствіи ударовъ; въ предѣльномъ же случаѣ уравненія: (I_1), (I_2) . . . (I_n) даютъ систему ур. (I); слѣдовательно, ур. (I) и будутъ уравненіями движенія твердаго тѣла перемѣнной массы при отсутствіи ударовъ.

Когда разсматриваемое тѣло имѣетъ *поступательное* движеніе, ур. (I) даютъ слѣдующія уравненія движенія, отнесенныя къ неподвижнымъ координатнымъ осямъ:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x}{dt^2} &= X \\ M\frac{d^2y}{dt^2} &= Y \\ M\frac{d^2z}{dt^2} &= Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

гдѣ x, y, z координаты одной изъ точекъ, которыя во все время движенія принадлежатъ тѣлу, а X, Y, Z проекціи равнодѣйствующей силъ и реакцій, къ тѣлу приложенныхъ.

Масса тѣла можетъ измѣняться такимъ образомъ, что *центръ инерціи будетъ сохранять свое положеніе относительно тѣла*, напримѣръ, если однородное тѣло, имѣющее форму эллипсоида, сгораетъ, удерживая форму эллипсоида съ первоначальнымъ центромъ.

Въ этомъ случаѣ при составленіи ур. (I) можемъ взять за начало координатныхъ осей, связанныхъ съ тѣломъ, центръ инерціи; тогда

ур. (I) значительно упрощаются и три изъ нихъ, содержащія проекціи главнаго вектора силъ и реакцій, будучи отнесены къ неподвижнымъ координатнымъ осямъ, представляются въ видѣ (6), гдѣ x, y, z координаты центра инерціи, а X, Y, Z проекціи главнаго вектора силъ и реакцій.

Уравненія (I) выражаютъ движеніе твердаго тѣла перемѣнной массы и тогда, когда измѣненіе массы сопровождается *ударами*, если только главный векторъ и главный моментъ прибавочныхъ силъ равны нулю.

Въ случаѣ *несвободнаго* тѣла, если это условіе и не удовлетворено, но прибавочныя силы не вліяютъ на движеніе тѣла, а только на реакціи опоръ, тогда дифференціальныя уравненія, которыя получаются, по исключеніи реакцій, для опредѣленія движенія твердаго тѣла, имѣютъ, очевидно, тотъ же видъ, что и въ случаѣ постоянной массы; при этомъ предполагается, конечно, что уравненія написаны такимъ образомъ, что величины, которыя становятся перемѣнными вслѣдствіе измѣненія массы, не находятся подъ знакомъ дифференціала.

Если однѣ изъ измѣняющихъ частицъ присоединяются къ тѣлу, а другія въ тоже время отъ него отдѣляются, тогда можетъ случиться, что масса тѣла остается постоянною, величины же: A, B, C, D, E, F, ξ, η, ζ — всѣ или только нѣкоторыя — непрерывно измѣняются съ теченіемъ времени; движеніе тѣла въ этомъ случаѣ, при вышеуказанныхъ условіяхъ для прибавочныхъ силъ, выражается также ур. (I).

§ 6. Примѣръ.

Для иллюстраціи разсужденія, которое привело насъ въ началѣ предыдущаго параграфа къ ур. (I), мы возьмемъ *случай*, когда тяжелое твердое тѣло вращается вокругъ неподвижной горизонтальной оси, проходящей чрезъ центръ тяжести тѣла, при дѣйствіи груза, прикрѣпленнаго къ концу гибкой и нерастяжимой нити, навернутой на неизмѣняемомъ однородномъ кругломъ цилиндрѣ, ось котораго совпадаетъ съ осью неизмѣнно связаннаго съ нимъ тѣла.

Предполагаемъ, что масса тѣла непрерывно измѣняется въ зависимости отъ времени по какому угодно закону при томъ лишь условіи, что центръ

тяжести остается на оси вращенія, а ударовъ или не происходитъ, или главный моментъ соотвѣтствующихъ имъ прибавочныхъ силъ относительно оси вращенія равенъ нулю; массою нити пренебрегаемъ.

Моментъ инерціи тѣла и соединеннаго съ нимъ неизмѣняемаго цилиндра обозначимъ чрезъ K; онъ выражается въ настоящемъ случаѣ нѣкоторой непрерывной функціей времени, — пусть $K=f(t)$.

Моментъ силы, приложенной къ тѣлу, относительно оси вращенія имѣетъ постоянную величину, которую обозначимъ чрезъ q.

Пусть угловая скорость тѣла въ моментъ $t=t_0$ равна φ'_0.

Опредѣляемъ угловую скорость тѣла ω въ моментъ $t=t'$.

Время отъ $t=t_0$ до $t=t'$ раздѣлимъ на весьма малые промежутки: $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots\ldots\ldots \tau_n$, о которыхъ говорено выше.

Въ теченіе какого-либо промежутка τ_i движеніе тѣла выражается уравненіемъ

$$K_i \frac{d^2\varphi}{dt^2}=q,$$

гдѣ K_i есть значеніе K для того момента, въ который начинается промежутокъ τ_i.

Будемъ обозначать моментъ

$$t_0+\tau_1+\tau_2+\ldots\ldots+\tau_i$$

чрезъ t_i, полагая $i=1, 2, \ldots n$, и угловую скорость тѣла въ этотъ моментъ чрезъ φ'_i.

$$t=t_0 \ldots.\quad K_0=f(t_0),\quad \varphi'_0=\varphi'_0;$$

уравненіе движенія за время

$$\tau_1 \ldots.\quad f(t_0)\frac{d^2\varphi}{dt^2}=q,\ \text{слѣдовательно,}\ \frac{d\varphi}{dt}=\frac{q}{f(t_0)}(t-t_0)+\varphi'_0;$$

въ концѣ промежутка τ_1 масса тѣла измѣняется, измѣняется моментъ инерціи K, но угловая скорость при этомъ не мѣняется.

$$t=t_1 \ldots.\quad K_1=f(t_1),\quad \varphi'_1=\frac{q}{f(t_0)}(t_1-t_0)+\varphi'_0;$$

уравненіе движенія за время

$$\tau_2 \ldots.\quad f(t_1)\frac{d^2\varphi}{dt^2}=q,\ \text{слѣдовательно,}\ \frac{d\varphi}{dt}=\frac{q}{f(t_1)}(t-t_1)+\varphi'_1.$$

$$t=t_2 \ldots.\quad K_2=f(t_2),\quad \varphi'_2=\frac{q}{f(t_1)}(t_2-t_1)+\varphi'_1;$$

уравненіе движенія за время

$$\tau_2 \ldots. \quad f(t_2)\frac{d^2\varphi}{dt^2}=q, \text{ слѣдовательно, } \frac{d\varphi}{dt}=\frac{q}{f(t_2)}(t-t_2)+\varphi'_2.$$

. . . .

$$t=t_n=t' \ldots. \quad K_n=f(t_n), \quad \varphi'_n=\frac{q}{f(t_{n-1})}(t_n-t_{n-1})+\varphi'_{n-1}.$$

Замѣняя здѣсь угловую скорость φ'_{n-1} ея выраженіемъ чрезъ φ'_{n-2}, затѣмъ φ'_{n-2} ея выраженіемъ чрезъ φ'_{n-3} и т. д., наконецъ φ'_1 ея выраженіемъ чрезъ φ'_0, получимъ:

$$\varphi'_n=\varphi'_0+\frac{q}{f(t_0)}(t_1-t_0)+\frac{q}{f(t_1)}(t_2-t_1)+\ldots.+\frac{q}{f(t_{n-1})}(t_n-t_{n-1}) \ldots. (*)$$

Увеличивая число n, мы получаемъ въ предѣлѣ тотъ случай измѣненія массы, который разсматривается, и, слѣдовательно, въ предѣлѣ

$$\varphi'_n=\omega;$$

предѣлъ же правой части равенства (*) есть

$$\varphi'_0+\int_{t_0}^{t'}\frac{q}{f(t)}\,dt,$$

поэтому

$$\omega=\varphi'_0+\int_{t_0}^{t'}\frac{q}{f(t)}\,dt.$$

Такимъ образомъ для всякаго момента t мы имѣемъ

$$\frac{d\varphi}{dt}=\varphi'_0+\int_{t_0}^{t'}\frac{q}{f(t)}\,dt.$$

То же самое выраженіе для угловой скорости мы получимъ, интегрируя уравненіе

$$f(t)\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}=q;$$

отсюда и заключаемъ, что уравненіе

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2}=q,$$

— уравненіе того же вида, что и въ случаѣ постоянной массы, — выражаетъ разсматриваемое движеніе тѣла.

§ 7. Уравненія поступательнаго движенія твердаго тѣла перемѣнной массы при существованіи ударовъ.

Въ общемъ случаѣ, когда при измѣненіи массы происходятъ *удары*, въ ур. (I) войдутъ еще члены, соотвѣтствующіе прибавочнымъ силамъ.

Составимъ выраженія этихъ членовъ въ случаѣ *поступательнаго движенія свободнаго твердаго тѣла, когда задаваемыя силы, къ тѣлу приложенныя, приводятся къ одной силѣ.*

Поступательное движеніе тѣла вполнѣ опредѣляется движеніемъ одной изъ точекъ, принадлежащихъ тѣлу во все время движенія,— точки O, координаты которой обозначимъ попрежнему чрезъ x, y, z.

Предполагаемъ, что масса тѣла M и проекціи скорости центра инерціи измѣняющихъ точекъ *не зависятъ отъ скорости тѣла* и выражаются нѣкоторыми функціями отъ t, x, y, z, s, гдѣ s длина пути, пройденнаго точкою O; при этомъ исключается тотъ случай, когда функція, выражающая массу тѣла, обращается въ постоянную величину вслѣдствіе того, что однѣ измѣняющія точки присоединяются къ тѣлу, а другія отъ него въ то же время отдѣляются, и въ результатѣ масса тѣла остается постоянною.

Въ какой-либо моментъ t тѣло получаетъ ускореніе: во 1-хъ — отъ дѣйствія задаваемыхъ силъ, проекціи равнодѣйствующей которыхъ обозначимъ чрезъ X, Y, Z, во 2-хъ — вслѣдствіе ударовъ, сопровождающихъ измѣненіе массы.

Нужно найти выраженія для проекцій ускоренія, сообщаемаго ударами.

Раздѣляемъ все время движенія на весьма малые промежутки, въ которые происходитъ измѣненіе массы.

Пусть τ промежутокъ, заключающій въ себѣ моментъ t, m масса тѣла въ началѣ этого промежутка и μ измѣняющая масса, т. е. сумма массъ измѣняющихъ точекъ за время τ, величина того же порядка малости, что и τ; приписываемъ μ знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, увеличивается или уменьшается масса тѣла въ промежутокъ τ.

Подобно тому, какъ въ теоріи удара, здѣсь мы предполагаемъ.

что измѣненіе массы за время τ совершается въ столь малый промежутокъ времени θ_τ, что мы можемъ пренебрегать членами порядка малости θ_τ въ суммахъ, содержащихъ члены порядка малости τ, а также импульсами силъ, приложенныхъ къ тѣлу и измѣняющимъ точкамъ, за время θ_τ.

Проекціи скорости тѣла въ началѣ θ_τ обозначимъ чрезъ a, b, c, въ концѣ θ_τ—чрезъ x', y', z'; разности: $x'-a$, $y'-b$, $z'-c$ величины того же порядка малости, что и τ.

Такъ какъ масса тѣла есть функція только перемѣнныхъ: t, x, y, z, s, которыя измѣняются за время θ_τ на величины порядка малости θ_τ, поэтому измѣняющую массу μ мы можемъ считать постоянною въ теченіе промежутка θ_τ.

Если бы масса тѣла зависѣла отъ его *скорости*, тогда приращеніе массы за время θ_τ было бы величиной того же порядка малости, что и приращеніе скорости за это время, слѣдовательно, порядка малости τ, а потому мы не могли бы приписывать μ одно и то же значеніе въ теченіе всего промежутка θ_τ.

Скорости тѣла и центра инерціи измѣняющихъ точекъ при $\mu>0$ одинаковы въ концѣ θ_τ и различны въ началѣ θ_τ, при $\mu<0$ — наоборотъ.

Пренебрегая величинами порядка малости θ_τ, мы можемъ проекціи скорости центра инерціи измѣняющихъ точекъ въ началѣ θ_τ при $\mu>0$ и въ концѣ θ_τ при $\mu<0$ считать равными α, β, γ,—проекціямъ скорости центра инерціи измѣняющихъ точекъ въ моментъ t, такъ какъ эта скорость, по предположенію, не зависитъ отъ скорости тѣла.

Въ настоящемъ случаѣ такъ же, какъ въ теоріи удара, имѣютъ мѣсто равенства, выражающія, что количество движенія центра инерціи системы, состоящей изъ твердаго тѣла и измѣняющихъ точекъ, не мѣняется за время θ_τ; эти равенства, какъ при $\mu>0$, такъ и при $\mu<0$, представляются въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} ma+\mu\alpha-(m+\mu)\,x'&=0\\ mb+\mu\beta-(m+\mu)\,y'&=0\\ mc+\mu\gamma-(m+\mu)\,z'&=0 \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Отсюда находимъ выраженія для проекцій приращенія скорости тѣла вслѣдствіе удара, который происходитъ при измѣненіи массы за промежутокъ τ:

$$x' - a = \frac{\mu}{m}(\alpha - x')$$

$$y' - b = \frac{\mu}{m}(\beta - y')$$

$$z' - c = \frac{\mu}{m}(\gamma - z').$$

Раздѣляемъ эти равенства на τ; съ уменьшеніемъ промежутка τ такимъ образомъ, что моментъ t изъ него не выходитъ, m приближается къ M, такъ какъ M обозначаетъ массу тѣла въ моментъ t; переходя къ предѣлу, мы получаемъ для проекцій ускоренія, сообщаемаго тѣлу ударами, сопровождающими измѣненіе массы, въ моментъ t слѣдующія выраженія:

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}(\alpha - x'),\quad \frac{1}{M}\frac{dM}{dt}(\beta - y'),\quad \frac{1}{M}\frac{dM}{dt}(\gamma - z'),\ldots.(8)$$

гдѣ $\frac{dM}{dt}$ обозначаетъ полную производную отъ M по t, а x', y', z' — производныя: $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Искомыя выраженія проекцій на координатныя оси *прибавочной силы* будутъ, слѣдовательно:

$$\frac{dM}{dt}(\alpha - x'),\quad \frac{dM}{dt}(\beta - y'),\quad \frac{dM}{dt}(\gamma - z')\ldots\ldots..(9)$$

Если скорость центра инерціи измѣняющихъ точекъ зависитъ не только отъ времени, положенія тѣла и длины пути, пройденнаго одною изъ его точекъ, но и отъ *скорости тѣла*, тогда приращенія проекцій α, β, γ за время θ_τ будутъ величины того же порядка малости, что и приращенія за это время проекцій скорости тѣла, слѣдовательно, порядка малости τ.

Тѣмъ не менѣе и здѣсь мы можемъ примѣнить предыдущее разсужденіе и тогда получимъ для проекцій прибавочной силы тѣ же выраженія (9).

Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что проекціи скорости центра инерціи измѣняющей массы μ, въ началѣ θ_τ при $\mu>0$, въ концѣ θ_τ при $\mu<0$, равны α, β, γ, мы пренебрегаемъ теперь величинами порядка малости τ, но α, β, γ входятъ въ формулы (7) только въ видѣ произведеній $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$, слѣдовательно, въ этихъ формулахъ не приняты въ разсчетъ только величины порядка малости τ^2; при дѣленіи же на $m\tau$ и переходѣ затѣмъ къ предѣлу члены, соотвѣтствующіе такимъ величинамъ, исчезаютъ; слѣдовательно, и въ настоящемъ случаѣ проекціи ускоренія, которое тѣло получаетъ вслѣдствіе ударовъ при измѣненіи массы, выражаются также формулами (8).

Такимъ образомъ *дифференціальныя уравненія поступательнаго движенія твердаго тѣла перемѣнной массы, если она не зависитъ отъ скорости тѣла, представляются въ видѣ:*

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \frac{dM}{dt}(\alpha - x') \\ M\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \frac{dM}{dt}(\beta - y') \\ M\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \frac{dM}{dt}(\gamma - z') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(10)$$

Въ этихъ уравненіяхъ, вообще говоря, M есть нѣкоторая функція отъ t, x, y, z, s, а α, β, γ.... нѣкоторыя функціи отъ t, x, y, z, s, x', y', z'; X, Y, Z.... проекціи равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу.

Если перемѣнная s входитъ въ ур. (10), тогда къ нимъ присоединяется еще уравненіе:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Уравненія (10) выражаютъ поступательное движеніе твердаго тѣла перемѣнной массы и въ томъ случаѣ, когда во время движенія существуютъ такіе моменты, въ которые производная $\frac{dM}{dt}$ обращается въ нуль или скорости тѣла и центра инерціи измѣняющихъ точекъ становятся одинаковыми по величинѣ и направленію; въ эти моменты прибавочная сила равна нулю.

Если во все время движенія тѣла скорость центра инерціи измѣняющихъ точекъ одинакова по величинѣ и направленію со скоростью тѣла, тогда прибавочная сила остается равною нулю, и ур. (10) принимаютъ видъ ур. (6).

Слѣдуетъ замѣтить, что при существованіи ударовъ, сопровождающихъ измѣненіе массы, твердое тѣло можетъ двигаться поступательно и тогда, когда задаваемыя силы, къ нему приложенныя, не приводятся къ одной силѣ; но въ этомъ случаѣ предыдущія разсужденія уже не имѣютъ мѣста.

§ 8. Примѣры.

I. Для того, чтобы убѣдиться непосредственно на примѣрѣ, что дифференціальныя уравненія (10) дѣйствительно выражаютъ поступательное движеніе твердаго тѣла перемѣнной массы, когда силы задаваемыя приводятся къ одной силѣ, мы разсмотримъ слѣдующій случай движенія.

Тяжелое твердое тѣло, имѣющее форму прямого цилиндра съ вертикальными производящими, брошено вертикально вверхъ со скоростью a; плотность тѣла при этомъ предполагается одинаковою во всѣхъ точкахъ одного и того же горизонтальнаго сѣченія; во время движенія отъ тѣла со стороны верхняго основанія отдѣляются частицы съ постоянною абсолютною скоростью $\alpha \geqslant a$, направленною по вертикали вверхъ, такимъ образомъ, что масса тѣла убываетъ пропорціонально времени, а верхнее основаніе остается параллельнымъ нижнему.

Въ этомъ случаѣ тѣло движется, очевидно, поступательно.

Пусть масса тѣла M въ начальный моментъ $t=0$ равна m и затѣмъ уменьшается въ каждую единицу времени на величину $m\varepsilon$, такъ что $M = m(1 - \varepsilon t)$, гдѣ $\varepsilon > 0$.

Разсматриваемъ движеніе отъ $t = 0$ до какого либо момента $t = T$, удовлетворяющаго условію $T < \frac{1}{\varepsilon}$.

Ось Ox направимъ по вертикали внизъ.

Найдемъ скорость тѣла въ какой-либо моментъ $t' \leqslant T$ двумя способами: одинъ разъ, не пользуясь ур. (10), другой разъ, интегрируя эти уравненія.

1-й способъ. Раздѣлимъ время отъ $t = 0$ до $t = t'$ на n равныхъ промежутковъ τ.

Пусть въ концѣ каждаго промежутка τ отъ тѣла со стороны верхняго основанія отрывается вверхъ со скоростью α слой съ параллельными основаніями, масса котораго равна km, гдѣ $k = \varepsilon\tau$ есть положительная правильная дробь, — этотъ процессъ при уменьшеніи промежутка τ въ предѣлѣ дастъ намъ измѣненіе массы въ разсматриваемомъ случаѣ.

Будемъ послѣдовательно опредѣлять скорость тѣла въ моменты:

$$\tau,\ 2\tau,\ 3\tau,\ \ldots\ n\tau = t'.$$

Обозначимъ скорость тѣла, взятую со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, направлена ли она внизъ или вверхъ, въ концѣ промежутковъ: перваго, второго, третьяго, ... n-аго чрезъ

$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ \ldots\ x'_n$ до измѣненія массы

и чрезъ $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n$ послѣ измѣненія массы.

Въ теченіе промежутка отъ $t = 0$ до $t = \tau$ скорость тѣла опредѣляется уравненіемъ:

$$\frac{dx}{dt} = gt - a,$$

гдѣ $a > 0$, слѣдовательно,

$$x'_1 = g\tau - a.$$

Затѣмъ происходитъ неупругій ударъ, послѣ котораго масса тѣла равна $m - km$, а скорость

$$a_1 = \frac{mx'_1 + km\alpha}{m - km} = \frac{g\tau + k\alpha - a}{1 - k}.$$

Въ теченіе промежутка отъ $t = \tau$ до $t = 2\tau$ скорость тѣла опредѣляется уравненіемъ:

$$\frac{dx}{dt} = gt + C_1, \text{ гдѣ } C_1 = a_1 - g\tau = \frac{kg\tau + k\alpha - a}{1 - k},$$

слѣдовательно,

$$x'_2 = \frac{(2-k)g\tau + k\alpha - a}{1-k}$$

$$a_2 = \frac{(2-k)g\tau + 2k\alpha - a}{1-2k}.$$

Отъ $t = 2\tau$ до $t = 3\tau$:

$$\frac{dx}{dt} = gt + C_2, \text{ гдѣ } C_2 = a_2 - 2g\tau = \frac{3kg\tau + 2k\alpha - a}{1-2k}$$

$$x'_3 = \frac{(3-3k)g\tau + 2k\alpha - a}{1-2k}$$

$$a_3 = \frac{(3-3k)g\tau + 3k\alpha - a}{1-3k}.$$

Далѣе

$$x'_4 = \frac{(4-6k)g\tau + 3k\alpha - a}{1-3k}$$

. . . .

$$x'_n = \frac{\left[n - \frac{n(n-1)}{2}k\right]g\tau + (n-1)k\alpha - a}{1-(n-1)k}$$

$$a_n = \frac{\left[n - \frac{n(n-1)}{2}k\right]g\tau + nk\alpha - a}{1-nk}.$$

Принимая во вниманіе, что $k = \varepsilon\tau$ и $n\tau = t'$, находимъ:

$$x'_n = \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}t' + \frac{\varepsilon}{2}\tau\right)gt' + \alpha\varepsilon t' - \alpha\varepsilon\tau - a}{1 - \varepsilon t' + \varepsilon\tau}$$

$$a_n = \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}t' + \frac{\varepsilon}{2}\tau\right)gt' + \alpha\varepsilon t' - a}{1 - \varepsilon t'}.$$

Уменьшаемъ промежутки τ, увеличивая число ихъ n; въ предѣлѣ получаемъ:

$$\text{пред. } x'_n = \text{пред. } a_n = \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} t'\right) gt' + \alpha\varepsilon t' - a}{1 - \varepsilon t'}.$$

Такимъ образомъ скорость тѣла, движеніе котораго мы разсматриваемъ, во всякій моментъ t выражается формулой:

$$x' = gt + \frac{\left(\frac{gt}{2} + \alpha\right)\varepsilon t - a}{1 - \varepsilon t} \dots\dots\dots\dots (11)$$

2-й способъ. Ур. (10) въ разсматриваемомъ случаѣ приводятся къ одному уравненію, которое, по раздѣленіи на массу тѣла, представляется въ видѣ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon t}(\alpha + x') \dots\dots\dots\dots (12)$$

Интегрируемъ это уравненіе, принимая во вниманіе, что при $t = 0$ $x' = -a$; мы получимъ для $\frac{dx}{dt}$ выраженіе (11).

Такъ какъ поступательныя движенія, имѣющія въ каждый моментъ одну и ту же скорость, тождественни, поэтому мы заключаемъ, что ур. (12) дѣйствительно выражаетъ разсматриваемое движеніе тѣла.

Измѣняя знакъ ε, мы получимъ случай, когда масса возрастаетъ пропорціонально времени, напримѣръ, вслѣдствіе того, что къ нижнему основанію пристаютъ частицы съ постоянною абсолютною скоростью α.

Вообще, каковы бы ни были положительныя или отрицательныя значенія величинъ ε, a, α, скорость разсматриваемаго тѣла, какъ нетрудно видѣть, опредѣляется по формулѣ (11), и, слѣдовательно, движеніе тѣла дѣйствительно выражается дифференціальнымъ уравненіемъ (12).

II. Возьмемъ еще примѣръ, чтобъ убѣдиться въ томъ, что дифференціальныя уравненія (10) выражаютъ поступательное движеніе твердаго тѣла перемѣнной массы при дѣйствіи задаваемыхъ силъ, имѣю-

щихъ равнодѣйствующую, и тогда, когда скорость центра инерціи измѣняющихъ частицъ зависитъ отъ скорости тѣла.

Воспользуемся для этого случаемъ, который составляетъ предметъ предыдущаго параграфа, и измѣнимъ въ немъ только два условія, именно: *пусть теперь начальная скорость тѣла равна нулю, и, кромѣ того, пусть измѣняющія частицы отрываются отъ тѣла со стороны верхняго его основанія по вертикальному направленію вверхъ не съ постоянною скоростью, а со скоростью (абсолютною) равною по величинѣ скорости тѣла.*

1-й способъ — опредѣляемъ скорость тѣла въ какой-либо моментъ t' $\left(0<t'<\frac{1}{\varepsilon}\right)$, подобно предыдущему, не пользуясь ур. (10).

Промежутокъ отъ:

$$t=0 \text{ до } t=\tau \;\ldots\; \frac{dx}{dt}=gt,$$

$$x'_1=g\tau$$

$$a_1=g\tau\cdot\frac{1+k}{1-k}$$

$$t=\tau \text{ до } t=2\tau \;\ldots\; \frac{dx}{dt}=gt+C_1, \text{ гдѣ } C_1=a_1-g\tau$$

$$x'_2=g\tau\cdot\frac{2}{1-k}$$

$$a_2=g\tau\cdot\frac{2}{(1-k)(1-2k)}$$

$$t=2\tau \text{ до } t=3\tau \;\ldots\; \frac{dx}{dt}=gt+C_2, \text{ гдѣ } C_2=a_2-2g\tau$$

$$x'_3=g\tau\cdot\frac{(1-k)(1-2k)+2}{(1-k)(1-2k)}$$

$$a_3=g\tau\cdot\frac{(1-k)(1-2k)+2}{(1-2k)(1-3k)}$$

$t=3\tau$ до $t=4\tau \ldots \frac{dx}{dt}=gt+C_3$, гдѣ $C_3=a_3-3g\tau$

$$x'_4=g\tau\cdot\frac{(1-2k)(1-3k)+(1-k)(1-2k)+2}{(1-2k)(1-3k)}$$

$$a_4=x'_4\cdot\frac{1-2k}{1-4k}$$

. . . .

$$x'_n=\frac{g\tau}{[1-(n-2)k]\,[1-(n-1)k]}\{[1-(n-2)k]\,[1-(n-1)k]+$$
$$+[1-(n-3)k]\,[1-(n-2)k]+[1-(n-4)k]\,[1-(n-3)k]+$$
$$+\ldots+(1-k)\,(1-2k)+2\}$$

$$a_n=x_n'\cdot\frac{1-(n-2)k}{1-nk}.$$

Произведя суммированіе въ выраженіи x'_n, замѣняемъ k чрезъ $\varepsilon\tau$ и затѣмъ $n\tau$ чрезъ t', — находимъ:

$$x'_n=\frac{g}{(1-\varepsilon t'+2\varepsilon\tau)\,(1-\varepsilon t'+\varepsilon\tau)}\{(1-\varepsilon t')^2\,(t'-2\tau)+$$
$$+\varepsilon t'\,(1-\varepsilon t')\,(t'-2\tau)+\frac{1}{3}\varepsilon^2 t'(t'-\tau)(t'-2\tau)+2\tau\}.$$

Въ предѣлѣ, при уменьшеніи τ и увеличеніи числа n, имѣемъ:

$$\text{пред. } x'_n=\text{пред. } a_n=\frac{gt'}{(1-\varepsilon t')^2}\left(1-\varepsilon t'+\frac{1}{3}\varepsilon^2 t'^2\right).$$

Такимъ образомъ скорость тѣла въ разсматриваемомъ случаѣ во всякій моментъ $t\left(0<t<\frac{1}{\varepsilon}\right)$ выражается формулой:

$$x'=\frac{gt}{(1-\varepsilon t)^2}\left(1-\varepsilon t+\frac{1}{3}\varepsilon^2 t^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

2-й способъ. Ур. (10) приводятся въ настоящемъ случаѣ къ одному уравненію, которое, по раздѣленіи на массу тѣла, представляется въ видѣ:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g+\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon t}x' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

Интегрируя ур. (14) и принимая во вниманіе, что въ начальный моментъ скорость тѣла равна нулю, находимъ:

$$x' = \frac{g}{3\varepsilon}\left[\frac{1}{(1-\varepsilon t)^2} - (1-\varepsilon t)\right],$$

слѣдовательно, то же самое выраженіе, которое даетъ и формула (13).

III. Ур. (6) поступательнаго движенія твердаго тѣла имѣютъ мѣсто для поступательнаго движенія и тѣла не твердаго; затѣмъ законъ сохраненія движенія центра инерціи при дѣйствіи внутреннихъ силъ, которымъ мы пользовались для полученія выраженій (9), также существуетъ и въ случаѣ тѣлъ не твердыхъ; поэтому мы можемъ примѣнить ур. (10) къ движенію *какого угодно тѣла* перемѣнной массы, если только всѣ точки этого тѣла въ разсматриваемомъ движеніи имѣютъ въ каждый моментъ скорости, одинаковыя по величинѣ и направленію.

Примѣнимъ ур. (10) къ рѣшенію двухъ задачъ A. Cayley, которыя приведены въ „очеркѣ литературы" на стр. 10 и 12.

Первая задача. Ось Oz направляемъ по вертикали внизъ, плоскость стола принимаемъ за плоскость xy.

Такъ какъ скорости измѣняющихъ точекъ равны нулю, то ур. (10) даютъ намъ уравненіе движенія въ видѣ:

$$M\frac{d^2z}{dt^2} = Mg - \frac{dM}{dt}z'.$$

По условію задачи, принимая за единицу массы массу единицы длины цѣпи, имѣемъ

$$M = s,$$

гдѣ s длина свѣсившейся части цѣпи; полагая

$$z = s,$$

получаемъ ур. (1) A. Cayley:

$$s\frac{d^2s}{dt^2} = sg - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Вторая задача. Движеніе происходитъ по направленію оси Ox, силъ не приложено, скорости измѣняющихъ точекъ равны нулю, поэтому изъ ур. (10) получаемъ уравненіе движенія въ видѣ:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dM}{dt} x'.$$

По условію задачи масса движущагося тѣла

$$M = M_1 + m(a + x),$$

если чрезъ M_1 обозначимъ ту массу, прикрѣпленную къ концу цѣпи, которая у A. Cayley обозначена чрезъ M; поэтому уравненіе движенія будетъ:

$$[M_1 + m(a + x)] \frac{d^2x}{dt^2} = -m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

— ур. (2) A. Cayley.

Замѣтимъ, что прибавочная сила, проекціи которой входятъ въ ур. (10), имѣетъ такое же направленіе, какъ относительная скорость по отношенію къ тѣлу центра инерціи измѣняющихъ точекъ, а по величинѣ равна произведенію этой относительной скорости на полную производную отъ массы тѣла по времени.

Это обстоятельство можетъ иногда упростить задачу, ибо возможны такіе случаи измѣненія массы, въ которыхъ мы можемъ считать заданною не абсолютную, а именно относительную скорость центра инерціи измѣняющихъ точекъ; напримѣръ, масса тѣла можетъ уменьшаться вслѣдствіе того, что измѣняющія частицы отдѣляются отъ тѣла съ одной и той же относительной скоростью, которая можетъ имѣть постоянныя величину и направленіе, или только направленіе постоянное, а величину, измѣняющуюся въ зависимости отъ времени, отъ длины пройденнаго пути и т. д.

§ 9. Уравненія движенія центра инерціи тѣла при существованіи ударовъ.

Разсмотримъ случай, когда *при измѣненіи массы тѣла центръ инерціи его сохраняетъ свое положеніе относительно тѣла.*

Предполагаемъ, что масса тѣла M есть нѣкоторая функція времени, положенія тѣла и длины s пути, пройденнаго центромъ инерціи; при этомъ α, β, γ, проекціи скорости центра инерціи измѣняющихъ точекъ, могутъ зависѣть не только отъ времени, положенія тѣла и длины пути s, но также отъ поступательной и угловой скорости тѣла.

Тѣло предполагается свободнымъ, но данныя силы, къ нему приложенныя, могутъ быть какія угодно.

Исключая и здѣсь случай, когда функція, выражающая массу тѣла, обращается въ постоянную величину, мы примѣняемъ затѣмъ тотъ же способъ, который уже изложенъ для случая поступательнаго движенія, и приходимъ къ заключенію, что проекціи ускоренія, получаемаго центромъ инерціи свободнаго твердаго тѣла вслѣдствіе ударовъ, сопровождающихъ измѣненіе массы, выражаются формулами (8) въ томъ предположеніи, что x', y', z' обозначаютъ теперь проекціи скорости центра инерціи тѣла.

Умножая эти формулы на M, получаемъ выраженія (9) для проекцій главнаго вектора прибавочныхъ силъ; слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ *дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи тѣла будутъ ур. (10)*, въ которыхъ x, y, z, x', y', z' обозначаютъ координаты и проекціи скорости центра инерціи тѣла, а X, Y, Z проекціи главнаго вектора задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу.

Если во все время движенія $\alpha = x'$, $\beta = y'$, $\gamma = z'$, главный векторъ прибавочныхъ силъ равенъ нулю, и дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи тѣла принимаютъ видъ ур. (6).

§ 10. Задача о движеніи точки перемѣнной массы.

Мы можемъ уже теперь видѣть, что задача о движеніи твердаго тѣла перемѣнной массы приводитъ насъ къ задачѣ о движеніи *матеріальной точки,* масса которой измѣняется во время движенія.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (6) и (10), когда они выражаютъ поступательное движеніе тѣла, не зависятъ отъ формы, объема и плотности тѣла, слѣдовательно, они сохраняютъ свое значеніе и въ томъ случаѣ, когда масса тѣла будетъ сосредоточена въ одной геометрической точкѣ; мы получимъ тогда *матеріальную точку перемѣнной массы*, а уравненія (10) или (6) будутъ дифференціальными уравненіями движенія этой точки, смотря по тому, испытываетъ ли она удары при измѣненіи массы или нѣтъ.

То же значеніе мы можемъ приписывать уравненіямъ (6) и (10) и тогда, когда эти уравненія суть дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи тѣла, — при томъ лишь предположеніи, что, кромѣ вторыхъ производныхъ отъ координатъ, они содержатъ только перемѣнныя: t, x, y, z, s, x', y', z', ибо въ этомъ случаѣ уравненія (6) и (10) не зависятъ отъ формы, объема, плотности и угловой скорости тѣла.

Такимъ образомъ *мы имѣемъ основаніе для того, чтобы заняться разсмотрѣніемъ движенія матеріальной точки, масса которой измѣняется во время движенія*.

ГЛАВА II.

УРАВНЕНІЯ ДВИЖЕНІЯ ТОЧКИ ПЕРЕМѢННОЙ МАССЫ И ГЛАВНЫЯ ИХЪ СЛѢДСТВІЯ.

---

§ 1. Измѣненіе массы точки.

Въ предыдущей главѣ мы видѣли, какимъ образомъ, разсматривая движеніе тѣла перемѣнной массы, мы приходимъ къ задачѣ *о движеніи матеріальной точки, масса которой измѣняется съ теченіемъ времени.*

Приращеніе, которое масса точки получаетъ въ какой-либо моментъ, можетъ быть или положительнымъ или отрицательнымъ.

Ту массу, которая присоединяется къ массѣ точки въ первомъ случаѣ и отдѣляется отъ нея во второмъ, называемъ измѣняющею массой и разсматриваемъ, какъ сосредоточенную также въ одной точкѣ.

Измѣненіе массы точки является такимъ образомъ, вообще говоря, какъ результатъ неупругаго удара, происходящаго при встрѣчѣ двухъ матеріальныхъ точекъ: измѣняемой и измѣняющей. Скорости обѣихъ точекъ могутъ быть и равны между собою, тогда при измѣненіи массы удара не происходитъ.

Пусть въ нѣкоторый моментъ: m и v масса и скорость разсматриваемой точки перемѣнной массы; μ измѣняющая масса, взятая со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, присоединяется ли она къ массѣ точки или отдѣляется отъ нея; u скорость измѣняющей массы; тогда

масса точки послѣ измѣненія будетъ $m + \mu$, а скорость ея по величинѣ и направленію выражается формулой

$$\frac{\overline{mv} + \overline{\mu u}}{m + \mu},$$

гдѣ въ числителѣ имѣемъ геометрическую сумму или геометрическую разность количествъ движенія.

Движеніе точки въ послѣдующій затѣмъ промежутокъ времени опредѣляется, какъ движеніе точки постоянной массы.

Такимъ образомъ рѣшеніе задачи о движеніи точки, масса которой измѣняется *чрезъ извѣстные промежутки времени*, приводится къ послѣдовательному рѣшенію двухъ задачъ, разсматриваемыхъ въ динамикѣ точки постоянной массы: 1-я—разсчетъ неупругаго удара двухъ точекъ, 2-я — опредѣленіе движенія точки.

Займемся изслѣдованіемъ того случая, когда промежутки, раздѣляющіе моменты измѣненія массы и соотвѣтствующія имъ приращенія массы настолько малы, что измѣненіе массы точки можемъ разсматривать, какъ процессъ, *непрерывно совершающійся съ теченіемъ времени*.

Допускаемъ при этомъ, что проекціи на координатныя оси скорости измѣняющей массы, а также масса разсматриваемой точки и проекціи равнодѣйствующей силъ, къ ней приложенныхъ, могутъ быть выражены, какъ *непрерывныя функціи*, вообще говоря, времени, положенія и скорости точки и длины пройденнаго ею пути.

Случай, когда точка и измѣняющая масса имѣютъ одинаковыя скорости.

§ 2. Уравненія движенія свободной точки.

Масса точки, при употребленіи декартовыхъ координатъ, выражается, вообще говоря, въ видѣ:

$$m = f(t, x, y, z, s, x', y', z'), \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ s обозначаетъ длину пути, пройденнаго точкой, а x', y', z' проекціи скорости точки на координатныя оси; относительно функціи f предполагаемъ, что во все время, пока движеніе точки разсматривается, функція f остается непрерывною и не обращается въ нуль.

Проекціи равнодѣйствующей силъ, къ точкѣ приложенныхъ, могутъ быть выражены, вообще говоря, нѣкоторыми функціями времени, положенія и скорости точки и, кромѣ того, параметровъ: p_1, p_2, . . , которые имѣютъ постоянныя значенія, если масса точки остается постоянною, и измѣняются, если измѣняется масса точки; однимъ изъ такихъ параметровъ можетъ быть, напримѣръ, самая масса точки.

Пусть X, Y, Z проекціи на координатныя оси равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ; тогда

$$X,\ Y,\ Z = \varphi_{1,2,3}(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ p_1,\ p_2,\ldots.)\ldots.(2)$$

Параметры p_1, p_2,.... суть, вообще говоря, нѣкоторыя функціи перемѣнныхъ, заключающихся въ формулѣ (1); подставивъ эти функціи вмѣсто p_1, p_2, ... въ формулы (2), получимъ выраженія проекцій равнодѣйствующей вида:

$$X,\ Y,\ Z = F_{1,2,3}(t,\ x,\ y,\ z,\ s,\ x',\ y',\ z')\ldots\ldots(3)$$

Функціи $F_{1,2,3}$ такъ же, какъ функціи $\varphi_{1,2,3}$, p_1, p_2, ... предполагаются конечными и непрерывными во все время, пока движеніе точки разсматривается.

Разсмотримъ случай, когда *точка свободна и скорость измѣняющей массы равна скорости точки.*

Разсужденіе, подобное тому, которое изложено въ § 5 предыдущей главы, показываетъ, что *уравненія движенія точки въ настоящемъ случаѣ представляются въ томъ же видѣ, какъ и тогда когда масса точки остается постоянною:*

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z \end{aligned}\right\}\ \cdots$$

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлимъ весь промежутокъ времени, въ теченіе котораго движеніе точки разсматривается, на весьма малые промежутки: $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ и предположимъ, что измѣненіе массы точки происходитъ въ концѣ каждаго изъ этихъ промежутковъ.

Движеніе точки въ теченіе каждаго изъ промежутковъ $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ выражается уравненіями вида (4), предполагая, что въ этихъ уравненіяхъ X, Y, Z выражены по формулѣ (2) и притомъ m, а, слѣдовательно, и параметры $p_1, p_2, \ldots$, имѣютъ постоянныя значенія, соотвѣтствующія началу промежутка.

Въ концѣ промежутка, въ тотъ моментъ, когда происходитъ измѣненіе массы, *положеніе и скорость точки не измѣняются*, поэтому уравненія движенія точки въ теченіе двухъ сосѣднихъ промежутковъ τ_i и τ_{i+1} связаны между собою еще тѣмъ обстоятельствомъ, что значенія координатъ точки и ихъ первыхъ производныхъ въ концѣ промежутка τ_i, которыя слѣдуютъ изъ соотвѣтствующихъ этому промежутку уравненій движенія и начальныхъ данныхъ, будутъ *начальными данными* для уравненій движенія въ послѣдующій промежутокъ τ_{i+1}.

Считая промежутки $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ безконечно малыми, мы приходимъ такимъ образомъ къ заключенію, что движеніе точки при дѣйствіи данныхъ силъ во все время, пока оно разсматривается, выражается одной и той же системой дифференціальныхъ уравненій (4), въ которыхъ m, X, Y, Z выражены по формуламъ (1) и (3).

Замѣтимъ, что мы приходимъ также къ этому заключенію, если будемъ разсматривать уравненія (4), которыя можемъ написать въ видѣ:

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dz}{dt} = z',$$

$$m\frac{dx'}{dt} = X, \quad m\frac{dy'}{dt} = Y, \quad m\frac{dz'}{dt} = Z,$$

Раздѣлимъ ур. (4) на число m, выражающее массу точки; получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X_1 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y_1 \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z_1 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

гдѣ

$$X_1 = \frac{1}{m} X, \quad Y_1 = \frac{1}{m} Y, \quad Z_1 = \frac{1}{m} Z.$$

Мы можемъ разсматривать X_1, Y_1, Z_1, какъ проекціи силы, направленіе которой то же, что и направленіе данной силы, приложенной къ точкѣ, а величина равна величинѣ послѣдней, разсчитанной на единицу массы точки.

Ур. (6) выражаютъ, что *свободная точка перемѣнной массы, не испытывающая ударовъ при измѣненіи массы, движется при дѣйствіи данной силы такъ же, какъ движется свободная точка постоянной массы, равной единицѣ, при дѣйствіи той же силы, разсчитанной на единицу массы, и при тѣхъ же начальныхъ данныхъ.*

Замѣтимъ, что въ случаѣ, когда масса точки зависитъ отъ длины пройденнаго пути (s), и сила, къ ней приложенная, будучи разсчитана на единицу массы, также зависитъ, вообще говоря, отъ s; мы имѣемъ, слѣдовательно, такой случай, который въ динамикѣ точки постоянной массы не встрѣчается, но предыдущее предложеніе тѣмъ не менѣе остается справедливымъ.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

всѣ формулы динамики, которыя относятся къ движенію свободной точки постоянной массы, послѣ того, какъ мы положимъ въ нихъ массу точки равною единицѣ и силу приложенную замѣнимъ данною силой, разсчитанной на единицу

массы, будутъ имѣть мѣсто и для движенія свободной точки перемѣнной массы, если она не испытываетъ ударовъ при измѣненіи массы.

При этомъ, если масса точки зависитъ отъ длины пройденнаго пути (s), то мы разсматриваемъ s, какъ нѣкоторый параметръ, опредѣляемый уравненіемъ (5).

Приведемъ здѣсь предложенія, относящіяся къ количеству движенія (mv) и живой силѣ $\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right)$ точки, при измѣненіи массы которой не происходитъ ударовъ; величину какъ количества движенія, такъ и живой силы будемъ разсчитывать на единицу массы.

1. Приращеніе количества движенія точки, разсчитаннаго на единицу массы, за нѣкоторый промежутокъ времени геометрически равно импульсу силы, разсчитанной на единицу массы, за тотъ же промежутокъ времени.

Моментъ силы, разсчитанной на единицу массы, относительно какой-либо оси равенъ производной по времени отъ удвоенной и умноженной на единицу массы секторіальной скорости точки въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси, предполагая, что радіусъ векторъ движущейся точки проводится изъ точки пересѣченія оси съ плоскостью.

Въ томъ случаѣ, когда моментъ силы, разсчитанной на единицу массы, относительно какой-либо оси равенъ нулю, секторіальная скорость точки въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси, постоянна; такимъ образомъ законъ сохраненія площадей въ движеніи точки выражается одинаково, будетъ ли масса точки постоянною или перемѣнною:

если сила, приложенная къ точкѣ постоянной или перемѣнной массы, остается въ одной плоскости съ какою-либо неподвижною осью, то секторіальная скорость точки въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси, будетъ постоянною.

Отсюда слѣдуетъ, что при дѣйствіи центральной силы, центръ

которой неподвиженъ, точка перемѣнной массы движется съ постоянною секторіальною скоростью въ плоскости, заключающей въ себѣ центръ силы и начальную скорость точки.

2. Приращеніе живой силы точки, разсчитанной на единицу массы, за нѣкоторый промежутокъ времени равно работѣ приложенной силы, разсчитанной на единицу массы, въ движеніи точки за тотъ же промежутокъ времени.

Если существуетъ функція U_1 (t, x, y, z), частныя производныя которой по координатамъ выражаютъ проекціи на соотвѣтствующія координатныя оси силы, разсчитанной на единицу массы, то такую функцію мы можемъ назвать силовою функціей для этой силы.

Замѣтимъ, что въ случаѣ перемѣнной массы сила, приложенная къ точкѣ, и та же сила, разсчитанная на единицу массы, вообще говоря, одновременно силовой функціи не имѣютъ: если для одной изъ этихъ силъ существуетъ силовая функція, то для другой силовая функція существуетъ только тогда, когда масса точки можетъ быть выражена нѣкоторой функціей отъ времени и силовой функціи, соотвѣтствующей первой силѣ; напримѣръ: въ случаѣ силы тяжести — силовая функція для силы, разсчитанной на единицу массы, будетъ $U_1 = gz$, если ось Oz направлена по вертикали внизъ, а для силы, приложенной къ точкѣ, силовая функція существуетъ только при $m = f(t, z)$; въ случаѣ центральной силы, величина которой выражается по формулѣ Якоби: $\frac{m}{r^2}\varphi(\theta)$, гдѣ r и θ полярныя координаты точки, — сила, приложенная къ точкѣ, имѣетъ силовую функцію при $m = \frac{f(r,t)}{\varphi(\theta)}$, а для той же силы, разсчитанной на единицу массы, силовой функціи не существуетъ.

Изъ ур. (6) слѣдуетъ: если силовая функція U_1 не содержитъ времени, то разность между живою силою точки, разсчитанною на единицу массы, и соотвѣтствующимъ значеніемъ силовой функціи U_1 при движеніи точки сохраняетъ постоянную величину.

Въ томъ случаѣ, когда силовая функція U_1 есть функція, не содержащая времени и притомъ однозначная, мы получаемъ

законъ сохраненія живой силы точки, разсчитанной на единицу массы:

при переходѣ точки съ одной поверхности уровня функціи U_1 на другую живая сила точки, разсчитанная на единицу массы, получаетъ одно и то же приращеніе, каковы бы ни были положеніе и скорость точки при сходѣ ея съ первой поверхности.

Отсюда слѣдуетъ, какъ частный случай: если точка, совершивъ какой-либо путь, возвращается на поверхность уровня функціи U_1, заключающую начальное положеніе точки, то скорость ея при вступленіи на эту поверхность имѣетъ начальную величину.

§ 4. Уравненія движенія несвободной точки.

Если координаты движущейся точки должны удовлетворять уравненію

$$\varphi\,(x, y, z, t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

тогда уравненіе

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2} + \varphi_{(1)} = 0,$$

гдѣ $\varphi_{(1)}$ обозначаетъ совокупность членовъ, не содержащихъ вторыхъ производныхъ отъ координатъ, представляетъ условіе, которому должно удовлетворять ускореніе точки; отсюда слѣдуетъ, что при существованіи ур. (7), которое можно разсматривать, какъ уравненія поверхности, кромѣ задаваемыхъ силъ, къ точкѣ приложена еще сила, направленная по нормали къ поверхности, — эту силу называемъ нормальной реакціей поверхности.

Принимая затѣмъ во вниманіе то, что уже изложено въ § 2 относительно движенія свободной точки перемѣнной массы, когда скорость измѣняющей массы равна скорости точки, мы приходимъ къ заключенію, что въ этомъ случаѣ *уравненія движенія точки перемѣн-*

ной массы по данной поверхности или по данной кривой имѣютъ тотъ же видъ, что и въ случаѣ точки постоянной массы:

$$\varphi(x, y, z, t) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right\} \dots\dots\dots\dots (8)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \qquad \psi(x, y, z, t) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \nu \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\} \dots\dots\dots\dots (9)$$

X, Y, Z обозначаютъ проекціи на координатныя оси равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ.

Если масса точки зависитъ отъ длины пройденнаго пути, то присоединяется еще ур. (5)

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

§ 5. Слѣдствія уравненій (8) и (9).

Уравненія (8) и (9) показываютъ, что *измѣняемость массы при отсутствіи ударовъ не вліяетъ на движеніе несвободной точки, если равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ пропорціональна массѣ точки;* въ этомъ случаѣ нормальная реакція поверхности или кривой, разсчитанная на единицу массы точки, имѣетъ ту же величину и то же направленіе, которое она имѣла бы, еслибъ масса движущейся точки оставалась постоянною, именно, равною единицѣ.

Какъ частный случай, изъ ур. (8) слѣдуетъ, что точка перемѣнной массы, движущаяся по неподвижной поверхности, когда задаваемыхъ силъ къ ней не приложено или равнодѣйствующая ихъ равна нулю, описываетъ съ постоянною скоростью геодезическую линію и при этомъ оказываетъ на поверхность давленіе, равное $\frac{mv^2}{\rho}$, гдѣ ρ радіусъ кривизны траекторіи.

Раздѣлимъ ур. (8) и (9) на число m, выражающее массу точки; мы получимъ тогда уравненія движенія въ видѣ:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2x}{dt^2}=X_1+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ \dots\dots\dots\end{array}\right\}\dots\dots\dots\dots\dots(10)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2x}{dt^2}=X_1+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\nu_1\frac{\partial\psi}{\partial x}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}\dots\dots\dots(11)$$

X_1, Y_1, Z_1 обозначаютъ проекціи на координатныя оси равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, разсчитанной на единицу массы.

Если для силы (X_1, Y_1, Z_1) существуетъ силовая функція U_1, не содержащая времени, тогда изъ ур. (10) и (11) слѣдуетъ, что при движеніи точки по неподвижной поверхности или по неподвижной кривой разность между живою силою точки, разсчитанною на единицу массы, и соотвѣтствующимъ значеніемъ силовой функціи U_1 сохраняетъ постоянную величину.

На основаніи ур. (10) и (11) мы можемъ распространить предложеніе, высказанное въ началѣ страницы 57, на случай несвободной точки и такимъ образомъ получаемъ слѣдующее предложеніе, которое справедливо для точки, какъ свободной, такъ и несвободной:

всѣ формулы динамики, которыя относятся къ движенію точки постоянной массы, будутъ имѣть мѣсто для точки перемѣнной массы, не испытывающей ударовъ при измѣненіи массы, послѣ того, какъ въ этихъ формулахъ мы положимъ массу точки равною единицѣ и равнодѣйствующую задаваемыхъ силъ равною разсчитанной на единицу массы равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ перемѣнной массы.

При этомъ, если масса точки зависитъ отъ длины пройденнаго пути (s), то мы разсматриваемъ s, какъ нѣкоторый параметръ, опредѣляемый уравненіемъ (5).

Укажемъ нѣкоторыя слѣдствія, вытекающія изъ только что высказаннаго общаго предложенія.

1. Если положеніе точки опредѣляется системою какихъ-либо независимыхъ координатныхъ параметровъ q, уравненія движенія представляются въ видѣ:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d}{dt}\left(v\,\frac{\partial v}{\partial q'}\right)=v\,\frac{\partial v}{\partial q}+Q\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(12)$$

гдѣ

$$q'=\frac{dq}{dt} \text{ и } Q=X_1\frac{\partial x}{\partial q}+Y_1\frac{\partial y}{\partial q}+Z_1\frac{\partial z}{\partial q};$$

скорость точки v, а также Q, предполагаются здѣсь выраженными чрезъ перемѣнныя q, ихъ первыя производныя по времени и t.

Въ случаѣ, когда масса точки зависитъ отъ длины пути s, присоединяемъ уравненіе

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{v^2},$$

гдѣ знакъ корня опредѣляется начальнымъ значеніемъ $\frac{ds}{dt}$.

При существованіи силовой функціи U_1 для равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, разсчитанной на единицу массы, ур. (12) будутъ:

$$\frac{d}{dt}\left(v\,\frac{\partial v}{\partial q'}\right)=v\,\frac{\partial v}{\partial q}+\frac{\partial U_1}{\partial q}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Въ этомъ случаѣ, вводя вмѣсто q' перемѣнныя p посредствомъ уравненій:

$$v\,\frac{\partial v}{\partial q'}=p,$$

получимъ каноническія уравненія движенія:

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

гдѣ

$$H=\Sigma pq'-\frac{1}{2}v^2-U_1.$$

2. Начало наименьшаго дѣйствія представляется въ видѣ:

$$\delta \int_A^B \sqrt{U_1 + h} \, . \, ds = 0;$$

U_1 здѣсь не содержитъ t, интегралъ берется по дугѣ кривой между данными точками A и B, h сохраняетъ постоянное значеніе, именно то, которое имѣетъ разность $\frac{1}{2} v^2 - U_1$, когда движущаяся точка находится въ точкѣ A.

3. Начало Гамильтона при существованіи силовой функціи U_1 выражается уравненіемъ:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} v^2 + U_1 \right) dt = 0.$$

Случай, когда точка и измѣняющая масса имѣютъ различныя скорости.

Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда *скорость измѣняющей массы не равна скорости точки.*

Скорость u измѣняющей массы можетъ оставаться постоянною по величинѣ и направленію, но можетъ и измѣняться въ зависимости отъ времени, отъ положенія и скорости точки, а также и отъ длины пройденнаго точкою пути; вообще говоря, проекціи скорости измѣняющей массы α, β, γ выражаются нѣкоторыми функціями отъ перемѣнныхъ: t, x, y, z, s, x', y', z'; эти функціи предполагаются конечными и непрерывными во все время, пока движеніе точки разсматривается.

Въ моментъ измѣненія массы точки въ настоящемъ случаѣ происходитъ ударъ, и скорость точки получаетъ приращеніе того же порядка малости, что и соотвѣтствующій промежутокъ времени τ.

При непрерывномъ измѣненіи массы дѣйствіе такихъ ударовъ на точку можно замѣнить дѣйствіемъ нѣкоторой непрерывно дѣйствующей силы,— назовемъ эту силу прибавочной силой.

Мы можемъ найти выраженія проекцій прибавочной силы, если

масса точки *не зависитъ отъ ея скорости;* только этотъ случай мы и будемъ разсматривать въ дальнѣйшемъ изложеніи.

§ 6. Уравненія движенія свободной точки.

Пусть точка свободна и масса ея выражается формулой

$$m = f(t, x, y, z, s).$$

Въ этомъ случаѣ вполнѣ примѣнимо то разсужденіе, которое было изложено въ § 7, гл. I для случая поступательнаго движенія тѣла.

Обозначая чрезъ X', Y', Z' проекціи на координатныя оси прибавочной силы, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} X' &= \frac{dm}{dt}(\alpha - x') \\ Y' &= \frac{dm}{dt}(\beta - y') \\ Z' &= \frac{dm}{dt}(\gamma - z') \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (13)$$

гдѣ

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x}x' + \frac{\partial m}{\partial y}y' + \frac{\partial m}{\partial z}z' + \frac{\partial m}{\partial s}v.$$

Выраженія (13) показываютъ, что *прибавочная сила имѣетъ направленіе геометрической разности скоростей измѣняющей массы и движущейся точки, а по величинѣ равна произведенію этой разности на полную производную отъ массы точки по времени.*

Присоединяемъ прибавочную силу къ силамъ задаваемымъ, и тогда уравненія движенія свободной точки, перемѣнная масса которой не зависитъ отъ скорости, представляются въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \frac{dm}{dt}(\alpha - x') \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \frac{dm}{dt}(\beta - y') \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \frac{dm}{dt}(\gamma - z') \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (14)$$

гдѣ X, Y, Z обозначаютъ проекціи равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ; если масса точки зависитъ отъ длины пройденнаго пути, къ ур. (14) присоединяется ур. (5).

§ 7. Уравненія движенія несвободной точки.

Составимъ уравненія движенія точки какъ по данной поверхности, такъ и по данной кривой, предполагая, что масса точки не зависитъ отъ ея скорости:

$$m = f\,(t, x, y, z, s).$$

При этомъ мы будемъ употреблять тѣ же обозначенія, что и въ § 7, гл. I: τ какой-либо изъ весьма малыхъ промежутковъ, на которые мы дѣлимъ все время движенія; μ соотвѣтствующая измѣняющая масса, взятая со знакомъ + или —; a, b, c проекціи скорости точки до соударенія съ измѣняющей массой μ, x', y', z'—послѣ соударенія.

1. Пусть точка движется по данной поверхности:

$$\varphi\,(x, y, z, t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Пренебрегаемъ перемѣщеніемъ точки и поверхности за время удара, а также импульсами задаваемыхъ силъ за это время.

Полагая, что импульсъ реакціи поверхности за время удара равенъ $j\,\Delta\varphi$, гдѣ

$$\Delta\varphi = + \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2},$$

мы имѣемъ какъ при $\mu > 0$, такъ и при $\mu < 0$:

$$\left.\begin{aligned} m\,(x' - a) &= \mu\,(\alpha - x') + j\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ m\,(y' - b) &= \mu\,(\beta - y') + j\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ m\,(z' - c) &= \mu\,(\gamma - z') + j\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (15)$$

Величина j опредѣляется изъ того условія, что скорость точки въ концѣ удара удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}x' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z' + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Подставимъ въ это уравненіе вмѣсто x', y', z' ихъ выраженія изъ ур. (15); тогда, принимая во вниманіе, что для начала удара

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} a + \frac{\partial\varphi}{\partial y} b + \frac{\partial\varphi}{\partial z} c + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,$$

находимъ

$$j = \mu\Phi,$$

гдѣ

$$\Phi = -\frac{1}{(\Delta\varphi)^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\gamma\right).$$

Подставивши найденное выраженіе j въ равенства (15), раздѣлимъ ихъ на τ; предполагая затѣмъ, что промежутокъ τ безконечно малъ, мы получаемъ въ предѣлѣ слѣдующія выраженія для проекцій прибавочной силы:

$$X' = \frac{dm}{dt}(\alpha - x') + \frac{dm}{dt}\cdot\Phi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$Y' = \frac{dm}{dt}(\beta - y') + \frac{dm}{dt}\cdot\Phi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$Z' = \frac{dm}{dt}(\gamma - z') + \frac{dm}{dt}\cdot\Phi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Такимъ образомъ прибавочная сила въ настоящемъ случаѣ есть равнодѣйствующая двухъ силъ: одна изъ составляющихъ выражается такъ же, какъ прибавочная сила въ случаѣ свободной точки; другая направлена по нормали къ поверхности въ сторону противоположную той, куда направлена проекція на нормаль скорости измѣняющей массы, а по величинѣ равна этой проекціи, умноженной на полную производную отъ массы точки по времени.

Составляющую, направленную по нормали къ поверхности, мы можемъ сложить съ той реакціей, которую поверхность оказываетъ и тогда, когда скорость измѣняющей массы равна скорости точки; — получимъ силу, проекціи которой на координатныя оси могутъ быть представлены въ видѣ:

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Обозначая чрезъ X, Y, Z проекціи равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, мы получимъ уравненія движенія точки по поверхности (7) въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \frac{dm}{dt}(\alpha - x') + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \frac{dm}{dt}(\beta - y') + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \frac{dm}{dt}(\gamma - z') + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(16)$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

2. Пусть точка движется по данной кривой:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= 0 \\ \psi(x, y, z, t) &= 0 \end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots(17)$$

Подобно тому, какъ въ предыдущемъ случаѣ, обозначая чрезъ $j\Delta\varphi$ и $j_1\Delta\psi$ величины импульсовъ реакцій поверхностей (17), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} m(x' - a) = \mu(\alpha - x') + j\frac{\partial\varphi}{\partial x} + j_1\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\}\dots(18)$$

Величины j и j_1 опредѣляются изъ того условія, что скорость точки (v) въ началѣ и въ концѣ удара удовлетворяетъ уравненіямъ:

$$v.\ \Delta\varphi.\ \mathrm{Cos}\,(v, n_1) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

$$v.\ \Delta\psi.\ \mathrm{Cos}\,(v, n_2) + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0,$$

гдѣ n_1 и n_2—направленія положительныхъ нормалей къ поверхностямъ (17); получимъ

$$j = \mu\Phi, \quad j_1 = \mu\Psi,$$

гдѣ чрезъ Φ и Ψ обозначены для краткости нѣкоторыя извѣстныя функціи отъ $t, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$.

Подставивши эти выраженія j и j_1 въ равенства (18), дѣлимъ ихъ на τ и затѣмъ, переходя къ предѣлу, находимъ выраженія проекцій прибавочной силы:

$$X' = \frac{dm}{dt}(\alpha - x') + \frac{dm}{dt} \cdot \Phi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{dm}{dt} \cdot \Psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

. . . .

Послѣдніе два члена этихъ формулъ представляютъ проекціи двухъ составляющихъ прибавочной силы, направленныхъ по нормалямъ къ поверхностямъ (17); предполагая, что эти составляющія сложены съ соотвѣтствующими реакціями поверхностей, которыя поверхности оказываютъ на точку и тогда, когда скорость измѣняющей массы равна скорости точки, мы получимъ уравненія движенія точки по кривой (17) въ видѣ:

$$\left.\begin{array}{l} m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \frac{dm}{dt}(\alpha - x') + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nu\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots (19)$$

§ 8. Слѣдствія уравненій (14), (16) и (19).

Изъ ур. (14), (16) и (19) мы видимъ: уравненія движенія какъ свободной, такъ и несвободной точки перемѣнной массы, когда масса не зависитъ отъ скорости, представляются въ декартовыхъ координатахъ въ томъ же видѣ, что и въ случаѣ точки постоянной массы, если только къ задаваемымъ силамъ присоединить силу, имѣющую направленіе геометрической разности скоростей измѣняющей массы и точки, а по величинѣ равную этой разности, умноженной на полную производную отъ массы точки по времени.

Мы можемъ теперь на основаніи полученныхъ уравненій движенія высказать слѣдующее предложеніе:

всѣ формулы динамики, которыя относятся къ движенію какъ свободной, такъ и несвободной точки постоянной

массы, будутъ имѣть мѣсто для точки перемѣнной массы, не зависящей отъ скорости, послѣ того, какъ въ этихъ формулахъ мы положимъ массу точки равною единицѣ и равнодѣйствующую задаваемыхъ силъ равною разсчитанной на единицу массы равнодѣйствующей силъ задаваемыхъ, приложенныхъ къ точкѣ перемѣнной массы, и силы прибавочной.

Общему уравненію динамики точки постоянной массы, которое выражаетъ начало Даламбера въ связи съ началомъ возможныхъ перемѣщеній, въ настоящемъ случаѣ соотвѣтствуетъ уравненіе:

$$[X - mx'' + \frac{dm}{dt}(\alpha - x')]\,\delta x + [Y - my'' + \frac{dm}{dt}(\beta - y')]\,\delta y + \\ + [Z - mz'' + \frac{dm}{dt}(\gamma - z')]\,\delta z = 0.$$

Ур. (14), (16) и (19) могутъ быть написаны въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \mathfrak{X} + \frac{dm}{dt}(\alpha - x') \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \mathfrak{Y} + \frac{dm}{dt}(\beta - y') \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \mathfrak{Z} + \frac{dm}{dt}(\gamma - z') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(20)$$

гдѣ $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ обозначаютъ:

если точка свободна, то проекціи равнодѣйствующей силъ задаваемыхъ —

$$\mathfrak{X} = X, \quad \mathfrak{Y} = Y, \quad \mathfrak{Z} = Z;$$

если же точка несвободна, то проекціи равнодѣйствующей силъ задаваемыхъ и реакцій:

$$\mathfrak{X} = X + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ldots\ldots\ldots,$$

когда точка находится на данной поверхности;

$$\mathfrak{X} = X + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \nu\frac{\partial\psi}{\partial x}, \ldots\ldots,$$

когда точка находится на данной кривой.

Мы разсмотримъ ур. (20) при различныхъ предположеніяхъ относительно скорости измѣняющей массы.

§ 9. Скорость измѣняющей массы равна нулю.

Разсмотримъ прежде всего тотъ случай, когда скорость измѣняющей массы равна нулю:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Уравненія движенія точки въ этомъ случаѣ могутъ быть написаны въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(mx')}{dt} &= \mathfrak{X} \\ \frac{d(my')}{dt} &= \mathfrak{Y} \\ \frac{d(mz')}{dt} &= \mathfrak{Z} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Ур. (21) такъ же, какъ и уравненія движенія точки постоянной массы, выражаютъ, что скорость точки, вычерчивающей годографъ количества движенія точки перемѣнной массы, имѣетъ ту же величину и то же направленіе, что и равнодѣйствующая приложенныхъ къ точкѣ силъ.

Затѣмъ изъ ур. (21) слѣдуетъ, что приращеніе количества движенія точки за нѣкоторый промежутокъ времени равно по величинѣ и направленію импульсу равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ, за тотъ же промежутокъ времени.

Законъ площадей въ настоящемъ случаѣ представляется въ томъ же видѣ, какъ и для точки постоянной массы:

$$\frac{d}{dt}\left[m\,(xy' - yx')\right] = x\mathfrak{Y} - y\mathfrak{X}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Если моментъ равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ,

относительно какой либо оси, напримѣръ, относительно оси Oz, равенъ нулю, то ур. (21) допускаютъ интегралъ площадей

$$m\,(xy' - yx') = \text{Const.},$$

который выражаетъ, что секторіальная скорость точки въ плоскости xy обратно пропорціональна массѣ точки.

Пусть задаваемыя силы и масса точки удовлетворяютъ условію:

$$m\,(X dx + Y dy + Z dz) = dU,$$

гдѣ U есть нѣкоторая функція отъ координатъ точки; тогда какъ для точки свободной, такъ и для точки несвободной, движущейся по неподвижной поверхности или по неподвижной кривой, ур. (21) допускаютъ интегралъ

$$\frac{1}{2}\,(mv)^2 = U + \text{Const.} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Въ частномъ случаѣ, когда равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ, разсчитанная на единицу массы, имѣетъ потенціалъ $U_1\,(x, y, z)$ и притомъ $m = f\,(U_1)$, интегралъ (22) представляется въ видѣ:

$$\frac{1}{2}\,(mv)^2 = \int [f(U_1)]^2\, d\,U_1 + \text{Const.}$$

Введемъ въ ур. (21) вмѣсто декартовыхъ координатъ какіе либо независимыя координаты q; мы получимъ уравненія движенія въ видѣ:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right)}{\partial q'}\right] = Q + mv\,\dfrac{\partial v}{\partial q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (23)$$

гдѣ

$$q' = \frac{dq}{dt}, \quad Q = X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q}.$$

Если масса точки выражается нѣкоторой функціей только отъ времени: $m = f\,(t)$, тогда, обозначая живую силу точки чрезъ T,

такъ что $T = \frac{1}{2} mv^2$, мы можемъ написать ур. (23) въ той же формѣ, какъ и въ случаѣ точки постоянной массы:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) = \frac{\partial T}{\partial q} + Q \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (24)$$

если при этомъ для равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, разсчитанной на единицу массы, существуетъ силовая функція $U_1(x, y, z, t)$, то ур. (24) будутъ изопериметрическими для интеграла

$$\int_{t_0}^{t} [T + U_1 f(t)]\, dt.$$

Ур. (24) имѣютъ мѣсто и тогда, когда $m = f(t, s)$; въ этомъ случаѣ къ нимъ присоединяется уравненіе

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m} T.$$

Замѣтимъ, что при $m = f(t)$, если равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ не зависитъ отъ скорости точки, ур. (21) можно преобразовать такъ, что они не будутъ содержать первыхъ производныхъ отъ координатъ.

Въ самомъ дѣлѣ напишемъ эти уравненія въ видѣ:

$$\left.\begin{array}{l} m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathfrak{X} - \frac{dm}{dt}x' \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (25)$$

и введемъ вмѣсто t новую перемѣнную τ, полагая

$$d\tau = \frac{dt}{f(t)}, \dots\dots\dots\dots (26)$$

тогда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{1}{f}, \dots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{d\tau^2}\cdot\frac{1}{f^2} - \frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{f'}{f^2}, \dots$$

подставляя эти выраженія производныхъ отъ координатъ въ ур. (25), получимъ . . . . . .

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2x}{d\tau^2} = m\,\mathfrak{X}\\ \dots\dots\end{array}\right\}\dots\dots\dots\dots(27)$$

при этомъ предполагается, что въ выраженія m, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ вмѣсто t введено τ съ помощью ур. (26).

Ур. (21) могутъ быть преобразованы такъ, что они получатъ видъ ур. (27), и тогда, когда $m = f(x, y, z)$, если только равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ не зависитъ ни отъ времени, ни отъ скорости точки, и притомъ въ случаѣ несвободной точки уравненіе данной поверхности или уравненія данной кривой не содержатъ времени; перемѣнныя τ и t связаны въ этомъ случаѣ уравненіемъ

$$d\tau = \frac{dt}{f(x, y, z)};\ \dots\dots\dots\dots(28)$$

проинтегрировавши преобразованныя уравненія движенія, мы найдемъ x, y, z какъ функціи отъ τ, а затѣмъ съ помощью ур. (28) выразимъ t чрезъ τ посредствомъ квадратуры; для опредѣленія траекторіи точки эта квадратура намъ не нужна.

Разсмотримъ случай, когда равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ равна нулю:

$$X = Y = Z = 0.$$

Въ этомъ случаѣ свободная точка, какъ показываютъ ур. (21), движется прямолинейно, причемъ количество движенія точки остается постояннымъ.

Если точка не свободна и находится на неподвижной поверхности или на неподвижной кривой, то количество движенія точки также сохраняетъ *постоянную величину:* въ самомъ дѣлѣ, умножая ур (21) соотвѣтственно на mx', my', mz' и складывая, получимъ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m^2v^2) = 0,$$

слѣдовательно,

$$mv = m_0 v_0 \quad \ldots\ldots (29)$$

Двигаясь по данной неподвижной поверхности, точка описываетъ въ этомъ случаѣ геодезическую линію.

Для доказательства замѣтимъ, что

$$\frac{d(mx')}{dt} = \frac{d}{dt}\left(mv\frac{dx}{ds}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

а тогда, въ силу ур. (29), ур. (21) даютъ:

$$mv^2\frac{d^2x}{ds^2} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

и, слѣдовательно, главная нормаль траекторіи точки нормальна къ поверхности.

Давленіе точки на поверхность равно $m_0 v_0 \cdot \frac{v}{\rho}$, гдѣ ρ радіусъ кривизны траекторіи.

§ 10. Скорость измѣняющей массы направлена по одной прямой со скоростью точки.

Пусть

$$\frac{\alpha}{x'} = \frac{\beta}{y'} = \frac{\gamma}{z'} = k,$$

гдѣ k, вообще говоря, величина перемѣнная и притомъ $k > 0$, когда скорость измѣняющей массы направлена въ ту же сторону, что и скорость точки; въ противномъ случаѣ $k < 0$.

Уравненія движенія точки будутъ:

$$\left.\begin{matrix} m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathfrak{X} + \frac{dm}{dt}(k-1)x' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots (30)$$

Замѣтимъ, что въ тѣхъ случаяхъ, когда измѣняющая масса имѣетъ такую же скорость, какъ и точка, или скорость равную нулю,

уравненія движенія точки представляютъ частный случай ур. (30) при $k = 1$ и $k = 0$.

Укажемъ два случая, въ которыхъ эти уравненія приводятся къ уравненіямъ такого же вида, какъ и ур. (27).

1. $m = f(t)$. Если равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ не зависитъ отъ скорости точки и отношеніе k или величина постоянная или функція времени, полагаемъ

$$d\tau = \psi(t)\,dt,$$

гдѣ

$$\psi(t) = \frac{1}{m}\,e^{\int k\frac{dm}{m}},$$

тогда ур. (30) преобразуются въ уравненія:

$$m\psi^2\frac{d^2x}{d\tau^2} = \mathfrak{X}$$

. . . .

При постоянномъ значеніи k

$$\psi = m^{k-1}.$$

2. $m = f(x, y, z)$. Если равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ зависитъ только отъ положенія точки, а отношеніе k или величина постоянная или функція отъ m, полагаемъ

$$d\tau = \psi\,(x, y, z)\,dt,$$

гдѣ

$$\psi\,(x, y, z) = \frac{1}{m}\,e^{\int k\frac{dm}{m}},$$

тогда ур. (30) представятся также въ видѣ:

$$m\,\psi^2\frac{d^2x}{d\tau^2} = \mathfrak{X}$$

. . . .

При постоянномъ значеніи k

$$\psi = m^{k-1}.$$

Разсмотримъ случай, когда равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ равна нулю:

$$X = Y = Z = 0.$$

Въ этомъ случаѣ движеніе свободной точки происходитъ, очевидно, по той прямой линіи, по которой направлена ея начальная скорость, и, слѣдовательно, движеніе опредѣляется однимъ уравненіемъ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dm}{dt}(k-1)\,x' \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Ур. (31) можемъ написать въ видѣ:

$$\frac{dx'}{x'} = (k-1)\frac{dm}{m}$$

и, слѣдовательно, мы легко найдемъ первый интегралъ, если $k-1$ выражается произведеніемъ функціи отъ m на функцію отъ x'; при постоянномъ значеніи k имѣемъ

$$x' = Cm^{k-1},$$

гдѣ C постоянная произвольная.

Если точка находится на неподвижной поверхности или на неподвижной кривой, то, умножая ур. (30) на x', y', z' и складывая, при $X = Y = Z = 0$ мы получимъ, по раздѣленію на mv^2,

$$\frac{dv}{v} = (k-1)\frac{dm}{m},$$

какъ и въ случаѣ свободной точки.

Въ силу этого уравненія ур. (30) для движенія точки по неподвижной поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ даютъ намъ:

$$mv^2\frac{d^2x}{ds^2} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

. . . .

и, слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ точка описываетъ на поверхности геодезическую линію, оказывая на поверхность давленіе, равное $\frac{mv^2}{\rho}$, гдѣ ρ радіусъ кривизны траекторіи.

§ 11. Скорость измѣняющей массы направлена въ нормальной плоскости траекторіи точки.

Въ этомъ случаѣ

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0.$$

Пусть равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ равна нулю:

$$X = Y = Z = 0;$$

тогда изъ ур. (20) слѣдуетъ, что при движеніи точки свободной, а также при движеніи точки по неподвижной поверхности или по неподвижной кривой, количество движенія точки сохраняетъ постоянную величину.

Если точка движется по неподвижной поверхности и скорость u измѣняющей массы направлена по нормали къ поверхности, то при $X = Y = Z = 0$ точка описываетъ геодезическую линію.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія движенія точки по поверхности при $X = Y = Z = 0$ могутъ быть написаны въ видѣ:

$$m \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{ds} + mv^2 \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dm}{dt} \alpha - \frac{dm}{dt} x' + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

. . . .

слѣдовательно, при $mv = \text{Const.}$ имѣемъ:

$$\left. \begin{array}{l} mv^2 \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dm}{dt} \alpha + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

Пусть

$$\frac{\alpha}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\beta}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{\gamma}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = \varepsilon,$$

гдѣ ε, вообще говоря, величина перемѣнная и притомъ $\varepsilon > 0$, когда скорость измѣняющей массы направлена по положительной нормали къ поверхности, въ противномъ случаѣ $\varepsilon < 0$; тогда ур. (32) будутъ:

$$mv^2 \frac{d^2x}{ds^2} = \left(\varepsilon \frac{dm}{dt} + \lambda\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

. . . .

слѣдовательно, траекторія точки есть геодезическая линія.

При этомъ для опредѣленія давленія точки на поверхность имѣемъ:

$$\lambda \Delta \varphi = \frac{mv^2}{\rho} \mp \frac{dm}{dt} u,$$

если главная нормаль кривой совпадаетъ съ положительною нормалью къ поверхности, и

$$\lambda \Delta \varphi = -\frac{mv^2}{\rho} \mp \frac{dm}{dt} u,$$

если главная нормаль кривой совпадаетъ съ отрицательной нормалью къ поверхности; у вторыхъ членовъ беремъ верхніе или нижніе знаки, смотря по тому, направлена ли скорость u по положительной или по отрицательной нормали къ поверхности.

§ 12. Замѣчанія относительно общаго случая.

Ур. (20) показываютъ, что общій случай приводится къ тому случаю, когда скорость измѣняющей массы равна нулю, если въ число задаваемыхъ силъ включить силу, имѣющую направленіе скорости измѣняющей массы и равную этой скорости, умноженной на полную производную отъ массы точки по времени.

Замѣтимъ, что при $m = f(t)$, если равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ и скорость измѣняющей массы не зависятъ отъ скорости точки, мы можемъ освободить ур. (20) отъ первыхъ производныхъ отъ координатъ, вводя вмѣсто t перемѣнную τ посредствомъ уравненія:

$$d\tau = \frac{dt}{f(t)}.$$

Если существуетъ силовая функція U для равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ и притомъ скорость измѣняющей массы также имѣетъ потенціалъ, т. е.

$$\alpha = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial V}{\partial z},$$

гдѣ V есть нѣкоторая функція отъ x, y, z, t, тогда при $m = f(t)$ уравненія движенія точки въ независимыхъ координатахъ будутъ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) = \frac{\partial (T + W)}{\partial q'}$$

. . . .

гдѣ

$$T = \frac{1}{2} mv^2, \quad W = U + \frac{df}{dt} V.$$

Въ случаѣ, когда скорость измѣняющей массы имѣетъ *постоянныя* величину и направленіе, уравненія движенія точки представляются въ видѣ:

$$\frac{d}{dt}\left[m(x' - \alpha)\right] = \mathfrak{X}$$

. . . .

Если при этомъ точка свободна и $X = Y = Z = 0$, то

$$x' = \alpha + \frac{a_1}{m}, \quad y' = \beta + \frac{a_2}{m}, \quad z' = \gamma + \frac{a_3}{m},$$

гдѣ a_1, a_2, a_3 постоянныя величины.

Въ заключеніе еще одно замѣчаніе.

До сихъ поръ мы предполагали, что намъ заданы α, β, γ — проекціи скорости измѣняющей массы; но, если принять во вниманіе, что къ задачѣ о движеніи точки перемѣнной массы насъ приводитъ соотвѣтствующая задача о движеніи тѣла, тогда изъ замѣчанія въ концѣ § 8 предыдущей главы видно, что мы можемъ разсматривать и такіе случаи, въ которыхъ *задана по величинѣ и направленію геометрическая разность между скоростью измѣняющей массы и скоростью точки;* напримѣръ, эта геометрическая разность можетъ быть задана, какъ постоянная по величинѣ и по направленію, или постоянная по направленію, а по величинѣ измѣняющаяся въ зависимости отъ времени, отъ длины пройденнаго пути и т. д.

ГЛАВА III.

ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ.

Какъ примѣры прямолинейнаго движенія точки перемѣнной массы, мы возьмемъ прежде всего тѣ случаи, къ которымъ приходимъ при разсмотрѣніи вертикальнаго движенія ракеты и аэростата.

§ 1. Восходящее движеніе ракеты.

Въ то время, какъ ракета летитъ вверхъ, масса ея *уменьшается* вслѣдствіе сгоранія того горючаго вещества, которымъ она начинена; силы, дѣйствующія на ракету, суть: сила тяжести, сопротивленіе воздуха, давленіе газовъ, развивающихся при горѣніи движущаго состава, и прибавочная сила, если принять во вниманіе, что сгорающія частицы отрываются съ нѣкоторою относительною скоростью.

При томъ разстояніи, на которое ракета обыкновенно удаляется отъ поверхности земли, ускореніе силы тяжести и сопротивленіе воздуха, разсчитанное на единицу площади при скорости, равной единицѣ, можемъ считать постоянными; такъ какъ при этомъ горизонтальное сѣченіе ракеты не измѣняется, то сопротивленіе, испытываемое ракетой и разсчитанное на единицу скорости, также будетъ постояннымъ.

Пусть m обозначаетъ массу ракеты, $R\ (x')$ — сопротивленіе воздуха, p — давленіе газовъ и w — величину относительной скорости, которую имѣютъ сгорающія частицы въ моментъ ихъ отдѣленія.

Разсматривая вертикальное движеніе ракеты до тѣхъ поръ, пока въ ней происходитъ сгораніе, мы приходимъ къ слѣдующей задачѣ:

Опредѣлить восходящее вертикальное движеніе точки перемѣнной массы m, на которую, кромѣ силы тяжести, дѣйствуетъ сила, вообще говоря, перемѣнной величины p, направленная по вертикали вверхъ, и сопротивленіе среды $R(x')$, измѣняющееся въ зависимости только отъ скорости точки; при этомъ предполагается, что геометрическая разность между скоростями измѣняющей массы и точки направлена по вертикали внизъ и равна данной, вообще говоря, перемѣнной величинѣ w.

Направимъ ось Ox по вертикали вверхъ, тогда уравненіе движенія точки будетъ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg + p - \frac{dm}{dt}w - R(x') \ldots\ldots (1)$$

Если масса m, давленіе p и скорость w выражены, какъ нѣкоторыя функціи *времени*, то рѣшеніе задачи, какъ видно изъ ур. (1), приводится къ интегрированію дифференціальнаго уравненія перваго порядка относительно x'.

Это уравненіе будетъ уравненіемъ Риккати, если сопротивленіе воздуха принять пропорціональнымъ квадрату скорости.

Если же сопротивленіе воздуха можетъ быть выражено двучленомъ: $a + bx'$ при нѣкоторыхъ значеніяхъ постоянныхъ a и b, тогда ур. (1) будетъ линейнымъ уравненіемъ перваго порядка относительно x':

$$\frac{dx'}{dt} = -g + \frac{p}{m} - \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}w - \frac{1}{m}(a + bx') \ldots\ldots (2)$$

Въ томъ случаѣ, когда сгораніе въ ракетѣ происходитъ равномѣрно съ теченіемъ времени, мы имѣемъ

$$m = m_0(1 - \alpha t),$$

гдѣ α постоянная положительная величина; допуская, что при этомъ

давленіе p и скорость w *постоянны*, мы получаемъ изъ ур. (2) слѣдующее выраженіе для скорости точки:

$$x' = \frac{p + m_0 \alpha w - a}{b} + \frac{g}{\alpha(1-\mu)}(1 - \alpha t) + C(1 - \alpha t)^{\mu},$$

гдѣ

$$\mu = \frac{b}{\alpha m_0}$$

и C постоянная произвольная.

Отсюда находимъ

$$x = -\frac{p + m_0 \alpha w - a}{b\alpha}(1-\alpha t) - \frac{g}{2\alpha^2(1-\mu)}(1-\alpha t)^2 - \frac{C}{\alpha(1+\mu)}(1-\alpha t)^{1+\mu} + D,$$

гдѣ D постоянная произвольная.

§ 2. Вертикальное движеніе аэростата.

При движеніи аэростата измѣненіе его массы можетъ происходить вслѣдствіе различныхъ причинъ, таковы, напримѣръ: расходъ балласта, истеченіе газа, высыханіе или намоканіе оболочки и т. д.;— если аэростатъ привязной, то при подъемѣ масса его возрастаетъ вслѣдствіе того, что увеличивается длина прикрѣпленнаго къ нему каната.

Разсмотримъ вертикальный подъемъ *привязного аэростата*, принимая сопротивленіе воздуха пропорціональнымъ квадрату скорости; высота подъема предполагается при этомъ такою, при которой мы можемъ считать постоянными: вѣсъ газа, заключеннаго въ оболочкѣ, вѣсъ вытѣсненнаго объема воздуха и сопротивленіе воздуха, разсчитанное на единицу скорости.

Обозначимъ чрезъ m массу аэростата, т. е. массу всего снаряженія, газа и висящей части каната, чрезъ p вѣсъ вытѣсненнаго объема воздуха и чрезъ k сопротивленіе, разсчитанное на единицу скорости; пусть ось Ox будетъ направлена по вертикали вверхъ; масса аэростата можетъ быть выражена формулой:

$$m = m_0(1 + \alpha x),$$

гдѣ α постоянная положительная величина.

Предположимъ, что валъ, на который навернутъ канатъ, вращается съ такою угловою скоростью, что развертывающаяся часть каната въ каждый моментъ имѣетъ скорость, *равную* скорости аэростата.

Мы приходимъ тогда къ слѣдующей задачѣ о движенiи точки: *Опредѣлить восходящее вертикальное движенiе тяжелой точки въ средѣ, сопротивленiе которой пропорцiонально квадрату скорости, при дѣйствiи постоянной силы, направленной по вертикали вверхъ, предполагая, что масса точки возрастаетъ пропорцiонально высотѣ, причемъ измѣненiе массы не сопровождается ударами.*

Уравненiе движенiя точки, по раздѣленiи на массу, будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g + \frac{p}{m_0(1+ax)} - \frac{k}{m_0(1+ax)}x'^2 \ldots\ldots (3)$$

Первый интегралъ этого уравненiя даетъ намъ выраженiе скорости точки въ функцiи отъ x:

$$x'^2 = \frac{p}{k} - \frac{2g}{\alpha(1+\varepsilon)}(1+ax) + C(1+ax)^{-\varepsilon}, \ldots (4)$$

гдѣ

$$\varepsilon = \frac{2k}{\alpha m_0},$$

а C постоянная произвольная.

Полагая, что начальная скорость точки равна нулю, а также и $x_0 = 0$, получимъ

$$x'^2 = \frac{p}{k}\left[1-(1+\alpha x)^{-\varepsilon}\right] - \frac{2g}{\alpha(1+\varepsilon)}(1+\alpha x)\left[1-(1+\alpha x)^{-1-\varepsilon}\right] \ldots (4_1)$$

Изъ ур. (4) или ур. (4_1) высота точки x выразится въ функцiи отъ t посредствомъ квадратуры.

Въ томъ случаѣ, когда при $m = m_0 (1 + ax)$ будетъ принято во вниманіе, что *вѣсъ вытѣсненнаго объема воздуха измѣняется пропорціонально высотѣ*, такъ что

$$p = p_0 (1 - \beta x),$$

гдѣ β постоянная положительная величина, — уравненіе движенія имѣетъ тотъ же видъ, что и ур. (3).

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ

$$\frac{p}{m} = \frac{p_0}{a m_0}\left(\frac{\alpha+\beta}{1+ax} - \beta\right),$$

слѣдовательно, уравненіе движенія будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g - \frac{\beta p_0}{a m_0} + \frac{(\alpha+\beta) p_0}{a m_0} \cdot \frac{1}{1+ax} - \frac{k}{m_0 (1+ax)} x'^2;$$

оно отличается отъ ур. (3) только тѣмъ, что вмѣсто g здѣсь входитъ $g + \frac{\beta p_0}{a m_0}$ и вмѣсто p: $\frac{(\alpha+\beta) p_0}{\alpha}$.

Разсмотримъ восходящее движеніе аэростата въ томъ случаѣ, когда къ нему прикрѣпленъ канатъ, часть котораго, еще не вытянутая аэростатомъ, *лежитъ неподвижно на землѣ*.

Въ этомъ случаѣ скорость измѣняющей массы равна нулю, и, слѣдовательно, въ уравненіе движенія войдетъ членъ, соотвѣтствующій прибавочной силѣ:

$$X' = -\frac{dm}{dt} x',$$

но

$$m = m_0 (1 + ax),$$

слѣдовательно,

$$X' = -m_0 a x'^2.$$

Такимъ образомъ уравненіе движенія, по раздѣленіи на массу, будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g + \frac{p}{m_0(1+ax)} - \frac{k+m_0 a}{m_0(1+ax)} x'^2 \quad \ldots\ldots (3_1)$$

Это уравненіе отличается отъ ур. (3) только тѣмъ, что вмѣсто постоянной величины k теперь входитъ постоянная же величина $k + m_0 \alpha$; слѣдовательно, и въ разсматриваемомъ случаѣ при $p = \text{Const.}$ или, общѣе, при $p = p_0 (1 - \beta x)$ высота поднятія выражается, какъ функція отъ t, посредствомъ квадратуры.

Ур. (3_1) выражаетъ движеніе аэростата во все время, пока высота поднятія остается менѣе длины каната.

При разсмотрѣніи вертикальнаго движенія *свободнаго аэростата* сопротивленіе воздуха обыкновенно принимается пропорціональнымъ квадрату скорости, причемъ коэффиціентъ сопротивленія и вѣсъ вытѣсненнаго объема воздуха выражаются нѣкоторыми функціями высоты; если предположимъ, что масса аэростата при его подъемѣ или опусканіи выражается также нѣкоторой функціей высоты, измѣняясь, напримѣръ, вслѣдствіе непрерывнаго расходованія балласта, причемъ аэростатъ не испытываетъ ударовъ, тогда дифференціальное уравненіе движенія въ соотвѣтствующей задачѣ о движеніи точки будетъ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - mg + p - kx'^2,$$

гдѣ m, p и k суть нѣкоторыя функціи отъ x.

Это уравненіе будетъ линейнымъ уравненіемъ перваго порядка относительно x'^2, если за независимую перемѣнную взять x, и, слѣдовательно, движеніе точки выражается посредствомъ квадратуръ.

§ 3. Тяжелая точка массы $m = m_0 (1 + \alpha t)^2$ при сопротивленіи, пропорціональномъ квадрату скорости.

Приведемъ еще примѣръ прямолинейнаго движенія, въ которомъ масса точки выражается функціей времени, а сопротивленіе среды пропорціонально квадрату скорости, и въ то же время оба интеграла выражаются въ конечномъ видѣ.

Такой примѣръ представляетъ задача *о паденіи тяжелой точки, масса которой измѣняется съ теченіемъ времени, при отсутствіи ударовъ, по закону:*

$$m = m_0 (1 + \alpha t)^2,$$

гдѣ α величина постоянная, — предполагая, что сопротивленіе воздуха пропорціонально квадрату скорости, а коэффиціентъ сопротивленія сохраняетъ постоянную величину ($k^2 m_0$).

Пусть ось Ox направлена по вертикали внизъ.

Уравненіе движенія точки, по раздѣленіи на массу, представляется въ видѣ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{k^2}{(1+\alpha t)^2} x'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Положимъ:

$$1 + \alpha t = e^{\alpha\tau}$$

$$x' = e^{\alpha\tau}\left(\xi - \frac{\alpha}{2k^2}\right),$$

тогда ур. (5) преобразуется въ слѣдующее:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = k^2 (G^2 - \xi^2),$$

гдѣ

$$G = \frac{1}{k}\sqrt{g + \frac{\alpha^2}{4k^2}}.$$

Интегрируя, находимъ

$$\xi = G - \frac{2G}{Ce^{2Gk^2\tau} + 1};$$

отсюда получаемъ выраженіе для скорости точки:

$$x' = (1 + \alpha t)\left[G - \frac{\alpha}{2k^2} - \frac{2G}{1 + C(1+\alpha t)^{2\varkappa}}\right], \ldots\ldots (6)$$

гдѣ

$$\varepsilon = \frac{k^2 G}{\alpha}.$$

Дальнѣйшее интегрированіе намъ даетъ:

$$x = \left(\frac{G}{2\alpha} - \frac{1}{4k^2}\right)(1 + \alpha t)^2 - \frac{G}{\alpha} \cdot F[(1 + \alpha t)^2] + D,$$

гдѣ D постоянная произвольная, а F обозначаетъ функцію, которая опредѣляется уравненіемъ

$$F(u) = \int \frac{du}{1 + Cu^{\varepsilon}}$$

и, слѣдовательно, выражается извѣстнымъ образомъ въ конечномъ видѣ.

Если разсматривается *восходящее движеніе тяжелой точки при условіяхъ предыдущей задачи*, тогда уравненіе движенія будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g + \frac{k^2}{(1+\alpha t)^2} x'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Преобразуемъ это уравненіе, полагая:

$$1 + \alpha t = e^{\alpha\tau}$$

$$x' = e^{\alpha\tau}\left(\xi + \frac{\alpha}{2k^2}\right),$$

получимъ

$$\frac{d\xi}{d\tau} = k^2 (\mathrm{A} + \xi^2),$$

гдѣ

$$\mathrm{A} = \frac{1}{k^2}\left(g - \frac{\alpha^2}{4k^2}\right).$$

Интегрированіе приводитъ насъ къ различнымъ выраженіямъ для скорости точки, смотря по тому, какое значеніе: отрицательное, нулевое или положительное имѣетъ количество A.

A < 0.

$$x' = (1 + \alpha t)\left[\frac{\alpha}{2k^2} + G_2 - \frac{2G_2}{1 + C(1+\alpha t)^{2\varepsilon_2}}\right], \ldots\ldots (8)$$

гдѣ

$$G_2 = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4k^2} - g}, \quad \varepsilon_2 = \frac{k^2 G_2}{\alpha}, \quad C = \text{пост. произ.}$$

Формула (8) получается изъ формулы (6), замѣняя k^2 чрезъ $-k^2$; x выразится затѣмъ въ конечномъ видѣ въ функціи отъ t.

A = 0.

$$x' = \frac{\alpha}{2k^2}(1 + \alpha t)\left[1 + \frac{2}{C - lg(1+\alpha t)}\right],$$

отсюда x выражается посредствомъ квадратуры.

A > 0.

$$x' = (1 + \alpha t)\left\{\frac{\alpha}{2k^2} + G_1 \, tg\,[C + \varepsilon_1 \, lg(1 + \alpha t)]\right\},$$

гдѣ

$$G_1 = \frac{1}{k}\sqrt{g - \frac{\alpha^2}{4k^2}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{k^2 G_1}{\alpha};$$

а затѣмъ x выразится также посредствомъ квадратуры.

Задача, рѣшеніе которой составляетъ предметъ настоящаго параграфа, представляется намъ, когда мы разсматриваемъ вертикальное движеніе однороднаго тяжелаго тѣла при сопротивленіи среды, пропорціональномъ квадрату скорости, если это тѣло имѣетъ, напримѣръ, форму прямого эллиптическаго цилиндра съ вертикальною осью, высота котораго измѣняется съ теченіемъ времени по закону:

$$l = l_0 (1 + \alpha t)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Замѣтимъ, что дифференціальное уравненіе движенія (5) или (7) получается и тогда, когда мы разсматриваемъ вертикальное движеніе однороднаго тяжелаго шара, радіусъ котораго измѣняется по формулѣ (9), если сопротивленіе среды пропорціонально квадрату скорости и площади большого сѣченія шара.

ГЛАВА IV.

МАЛЫЯ КОЛЕБАНІЯ КРУГОВОГО МАЯТНИКА.

§ 1. Круговой маятникъ въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально скорости.

Вслѣдъ за примѣрами прямолинейнаго движенія точки перемѣнной массы приведемъ примѣръ движенія криволинейнаго, въ которомъ движеніе выражается также однимъ дифференціальнымъ уравненіемъ, и, слѣдовательно, точка движется по данной кривой.

Мы возьмемъ задачу *о весьма малыхъ колебаніяхъ кругового маятника перемѣнной массы въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально скорости.*

Пусть будетъ m масса маятника, l — его длина, θ — уголъ, отсчитываемый отъ вертикальной линіи, направленной внизъ, и k — сопротивленіе, которое маятникъ испытываетъ при скорости равной единицѣ.

Предполагая, что измѣненіе массы не сопровождается ударами, мы получимъ уравненіе движенія въ видѣ:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta - \frac{k}{m}\frac{d\theta}{dt} \dots\dots\dots\dots (1)$$

При измѣненіи массы отношеніе $\frac{k}{m}$, вообще говоря, измѣняется, и мы предположимъ, что это отношеніе выражено, какъ нѣкоторая функція *времени.*

Тогда ур. (1) будетъ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ второго порядка; полагая въ немъ

$$\theta = Ce^{\int \varphi dt},$$

гдѣ C постоянная произвольная, мы получимъ уравненіе перваго порядка:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g}{l} - \frac{k}{m}\varphi - \varphi^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Ур. (2) есть уравненіе Риккати, если называть этимъ именемъ, какъ дѣлаютъ нѣкоторые авторы, напримѣръ, Darboux („Théorie générale des surfaces" t. I, ch. II), вообще уравненіе вида:

$$\frac{d\varphi}{dt} = p + q\varphi + r\varphi^2,$$

гдѣ p, q и r какія-либо функціи отъ t.

Полагая

$$\varphi = \psi - \frac{k}{2m},$$

преобразуемъ ур. (2) въ уравненіе:

$$\frac{d\psi}{dt} = f(t) - \psi^2,$$

гдѣ

$$f(t) = -\frac{g}{l} + \frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{k}{m}\right)}{dt} + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{m}\right)^2.$$

Если геометрическая разность между скоростями измѣняющей массы и маятника не равна нулю, но выражается данною функціей времени и направлена по вертикали вверхъ или внизъ, тогда въ предыдущія уравненія вмѣсто g войдетъ нѣкоторая функція времени, если m и k будутъ также заданы какъ функціи времени.

§ 2. Случай, гдѣ сопротивленіе среды, разсчитанное на единицу массы при единицѣ скорости, равно $\frac{a}{1+\alpha t}$.

Разсмотримъ тотъ *случай*, когда

$$\frac{k}{m} = \frac{a}{1+\alpha t},$$

гдѣ a и α постоянныя величины: a положительная, α положительная или отрицательная.

Въ этомъ случаѣ ур. (1) будетъ:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta - \frac{a}{1+\alpha t}\frac{d\theta}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Введемъ въ ур. (3) вмѣсто t и θ новыя перемѣнныя τ и u полагая:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\frac{g}{l\alpha^2}}\,(1+\alpha t) = \tau \\ \theta\,(1+\alpha t)^{\frac{a-\alpha}{2\alpha}} = u \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

получимъ:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{du}{d\tau} + \left[1 - \left(\frac{a-\alpha}{2\alpha}\right)^2\frac{1}{\tau^2}\right]u = 0 \ldots\ldots (5)$$

Ур. (5) есть извѣстное уравненіе Бесселя.

Пусть

$$n = +\sqrt{\left(\frac{a-\alpha}{2\alpha}\right)^2},$$

слѣдовательно, n число цѣлое, если отношеніе $\frac{a}{\alpha}$ равно цѣлому нечетному числу, въ другихъ случаяхъ n число дробное, и $n = 0$ при $a = \alpha$.

Общій интегралъ ур. (5) можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ:

n дробное число:

$$\left.\begin{array}{l} u = A\,\vartheta^{n}_{(\tau)} + B\,\vartheta^{-n}_{(\tau)}, \\ n \text{ цѣлое число или нуль:} \\ u = A\,\vartheta^{n}_{(\tau)} + B\,\mathcal{Y}^{n}_{(\tau)}, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

гдѣ A и B постоянныя произвольныя, ϑ^n и ϑ^{-n} функціи Бесселя перваго рода, $\mathcal{Y}^n$ функція Бесселя второго рода, именно:

$$\vartheta^{n}_{(\tau)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{\Gamma(n+s+1)\,\Gamma(s+1)} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{n+2s},$$

гдѣ чрезъ Γ обозначена Эйлерова функція — гамма; ϑ^{-n} получится изъ функціи ϑ^n, если въ послѣдней замѣнить n чрезъ $-n$;

$$\mathcal{Y}^{n}_{(\tau)} = \vartheta^{n}_{(\tau)} \cdot lg\tau - \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \frac{n+2s}{s(n+s)}\, \vartheta^{n+2s}_{(\tau)} -$$

$$-\frac{1}{2}\,\Gamma(n+1) \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{1}{n-r} \cdot \frac{1}{\Gamma(r+1)} \left(\frac{2}{\tau}\right)^{n-r} \vartheta^{r}_{(\tau)}.$$

Имѣя формулы (4) и (6), легко уже выразить и уголъ θ въ функціи отъ t.

Скорость точки выражается также чрезъ функціи Бесселя:

$$l\frac{d\theta}{dt} = \alpha\sqrt{\frac{lg}{\alpha^2}} \cdot \frac{d\theta}{d\tau},$$

а изъ ур. (6) находимъ слѣдующія выраженія для производной $\frac{d\theta}{d\tau}$:

n дробное число:

$$\frac{a}{\alpha} > 1 \ldots \frac{d\theta}{d\tau} = \left(\frac{g}{l\alpha^2}\right)^{\frac{n}{2}} \tau^{-n} \left[-A\,\vartheta^{n+1}_{(\tau)} + B\,\vartheta^{-n-1}_{(\tau)}\right],$$

$$\frac{a}{\alpha} < 1 \ldots \frac{d\theta}{d\tau} = \left(\frac{g}{l\alpha^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \tau^{n} \left[\;A\,\vartheta^{n-1}_{(\tau)} - B\,\vartheta^{-n+1}_{(\tau)}\right],$$

n цѣлое число или нуль:

выраженія $\frac{d\theta}{d\tau}$ отличаются отъ написанныхъ только тѣмъ, что вмѣсто $B\,\mathfrak{I}^{-n-1}$ и $-B\,\mathfrak{I}^{-n+1}$ соотвѣтственно входятъ: $-B\,\mathfrak{Y}^{n+1}$ и $B\,\mathfrak{Y}^{n-1}$.

При весьма большихъ значеніяхъ перемѣнной τ значеніе Бесселевой функціи перваго и второго рода можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\frac{a_1 \operatorname{Cos} \tau + b_1 \operatorname{Sin} \tau}{\sqrt{\tau}},$$

гдѣ a_1 и b_1 суть постоянныя.

Поэтому изъ полученныхъ выше выраженій для $\frac{d\theta}{d\tau}$ слѣдуетъ, что при большихъ значеніяхъ τ производная $\frac{d\theta}{dt}$ получаетъ значенія весьма близкія къ нулю, когда $\frac{a}{\alpha} \geqslant 1$, а если $n < \frac{1}{2}$, то и при $\frac{a}{\alpha} < 1$.

Такъ какъ при $a > 0$ неравенству: $\frac{a}{\alpha} < 1$ соотвѣтствуетъ, очевидно, $n < \frac{1}{2}$, то мы заключаемъ, что при $a > 0$ скорость маятника по истеченіи нѣкотораго времени становится весьма близкою къ нулю; вмѣстѣ съ тѣмъ отклоненія маятника отъ вертикали уменьшаются и уголъ θ, какъ это видно изъ формулъ (6) и (4), стремится къ нулю.

Замѣтимъ, что

$$\theta = 1 - \frac{\tau^2}{2\left(\frac{a}{\alpha} + 1\right)} + \frac{\tau^4}{2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{a}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{a}{\alpha} + 3\right)} - \ldots,$$

гдѣ τ выражена по формулѣ (4), есть частный интегралъ ур. (3), слѣдовательно, и

$$\theta = \int_0^\pi \operatorname{Cos}(\tau \operatorname{Cos} z) . \operatorname{Sin}^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} z . dz$$

будетъ также частнымъ интеграломъ ур. (3), такъ какъ написанный здѣсь опредѣленный интегралъ отличается отъ предыдущаго выраженія θ только постояннымъ множителемъ.

Если $\frac{a}{\alpha}$ *положительное четное число*, то этотъ опредѣленный интегралъ выражается въ конечномъ видѣ, а тогда второй част-

ный интегралъ ур. (3) выразится въ квадратурахъ, и, слѣдовательно, мы получимъ *въ квадратурахъ* выраженіе для угла θ въ функціи отъ t.

Случай, только что разсмотрѣнный:

$$\frac{k}{m} = \frac{a}{1+\alpha t},$$

представляется, напримѣръ, тогда, когда масса маятника возрастаетъ ($\alpha > 0$) или убываетъ ($\alpha < 0$) пропорціонально времени, а сопротивленіе среды, разсчитанное на единицу скорости, остается постояннымъ; тотъ же случай имѣемъ мы и тогда, когда маятникъ состоитъ изъ тяжелаго однороднаго шара, подвѣшеннаго посредствомъ нити или стержня, массою которыхъ мы пренебрегаемъ, если при этомъ радіусъ шара измѣняется пропорціонально времени, а сопротивленіе среды пропорціонально скорости и площади большого круга шара.

ГЛАВА V.

ОБРАТНЫЯ ЗАДАЧИ.

Полученными въ главѣ II дифференціальными уравненіями движенія точки перемѣнной массы мы можемъ воспользоваться для рѣшенія обратныхъ задачъ, въ которыхъ требуется, напримѣръ, найти законъ измѣненія массы точки по нѣкоторымъ заданнымъ свойствамъ ея движенія при данныхъ силахъ.

I. Скорость измѣняющей массы равна скорости точки.

Разсмотримъ прежде всего тотъ случай, когда *при измѣненіи массы не происходитъ ударовъ.*

Пусть точка движется въ сопротивляющейся средѣ при дѣйствіи данныхъ силъ, равнодѣйствующая которыхъ пропорціональна массѣ точки; тогда мы, принимая во вниманіе заданныя свойства движенія, ищемъ сначала выраженіе для величины сопротивленія среды, разсчитаннаго на единицу массы; затѣмъ уже, если имѣется достаточно данныхъ, можемъ опредѣлить и законъ измѣненія массы, — напримѣръ, когда движущееся тѣло, отъ котораго мы переходимъ къ точкѣ, есть шаръ перемѣннаго радіуса, а сопротивленіе среды зависитъ только отъ радіуса шара и скорости его центра и притомъ даннымъ образомъ.

Относительно сопротивленія среды будемъ предполагать, что оно направлено противоположно скорости точки.

§ 1. Траекторія точки въ сопротивляющейся средѣ при данныхъ силахъ данная плоская кривая.

Найдемъ, *какъ должна выражаться величина сопротивленія среды, разсчитаннаго на единицу массы, для того, чтобы точка описывала дугу данной плоской кривой при дѣйствіи данныхъ силъ, равнодѣйствующая которыхъ, разсчитанная на единицу массы, зависитъ только отъ положенія точки.*

Пустъ будетъ:

$$y = f(x) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

уравненіе данной кривой, X и Y—проекціи разсчитанной на единицу массы равнодѣйствующей данныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, R—сопротивленіе среды, разсчитанное на единицу массы и дѣленное на скорость точки; кромѣ того будемъ обозначать производныя по t отъ x и y чрезъ x', y', x'', y''; производныя по x отъ функціи f чрезъ $f_{,}$, $f_{,,}$, $f_{,,,}$, наконецъ, частныя производныя отъ X и Y чрезъ X_x, X_y, Y_x, Y_y.

Уравненія движенія, по раздѣленіи на массу точки, представляются въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= X - Rx' \\ y'' &= Y - Ry' \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

Подставимъ въ уравненіе

$$y'' = f_{,}\, x'' + f_{,,}\, x'^2,$$

которое слѣдуетъ изъ ур. (1), вмѣсто x'' и y'' ихъ выраженія изъ ур. (2); получимъ:

$$Y - Ry' = f_{,}\, X - f_{,}\, Rx' + f_{,,}\, x'^2.$$

Принимая во вниманіе, что

$$y' = f_{,}\, x',$$

находимъ

$$x'^2 = \frac{Y - f_{,} X}{f_{,,}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

слѣдовательно,

$$x' = \pm \sqrt{\frac{1}{f_{,,}}(Y - f_{,} X)} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Возьмемъ производную по t отъ ур. (3) и вмѣсто x'' подставимъ соотвѣтствующее выраженіе изъ ур. (2); рѣшая полученное уравненіе относительно R, найдемъ R въ функціи отъ координатъ точки:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{f_{,,}}{Y - f_{,} X}}\left\{3X - \frac{1}{f_{,,}}\left[Y_x + f_{,} Y_y - f_{,}(X_x + f_{,} X_y)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{f_{,,,}}{f_{,,}^2}(Y - f_{,} X)\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Скорость точки выражается по формулѣ:

$$v = \sqrt{\frac{1}{f_{,,}}(1 + f_{,}^2)(Y - f_{,} X)}, \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

поэтому для сопротивленія среды получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$Rv = \frac{1}{2}\sqrt{1 + f_{,}^2} \cdot \mathcal{R}, \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

гдѣ $\mathcal{R}$ обозначаетъ множитель, слѣдующій за радикаломъ въ формулѣ (5).

Знакъ предъ радикаломъ въ формулахъ (5) и (7) долженъ быть тотъ же, что и въ формулѣ (4).

Послѣ того, какъ съ помощью ур. (4) и (1), произведя одно интегрированіе, мы выразимъ координаты точки въ функціяхъ отъ t, величина сопротивленія Rv по формулѣ (7) можетъ быть также выражена въ функціи отъ t.

Итакъ мы нашли, что R выражается по формулѣ (5), если точка описываетъ кривую (1) при дѣйствіи силы (X, Y).

Обратно, — легко убѣдиться въ томъ, что значенія x и y въ функціяхъ отъ t, вытекающія изъ ур. (1) и (3), удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ (2), если замѣнимъ въ нихъ R выраженіемъ (5).

Но при этомъ для всѣхъ положеній движущейся точки на данной кривой должны быть удовлетворены два условія, — первое:

$$\frac{Y - f_{,} X}{f_{,,}} \geqslant 0$$

слѣдуетъ изъ ур. (3); второе:

$$\frac{1}{x'} \mathcal{R} > 0,$$

гдѣ x' должно быть выражено по формулѣ (4), слѣдуетъ изъ того, что, предполагая R выраженнымъ по формулѣ (5), мы только тогда можемъ считать $-Rx'$ и $-Ry'$ проекціями сопротивленія среды, когда будетъ $R > 0$.

Если намъ будетъ извѣстно, что величина сопротивленія Rv представляетъ произведеніе двухъ множителей:

$$Rv = SV,$$

гдѣ S измѣняется только при измѣненіи массы, а V есть данная функція плотности среды и скорости точки, то, имѣя уже выраженія скорости и координатъ точки, съ помощью формулы (7) мы получимъ и выраженіе S.

§ 2. Случай тяжелой точки.

Разсмотримъ подробнѣе тотъ случай, *когда данная сила есть сила тяжести и данная кривая лежитъ въ вертикальной плоскости.*

Пусть уравненіе кривой будетъ

$$y = f(x) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1_1)$$

въ томъ предположеніи, что за ось Oy взята вертикальная линія, направленная внизъ.

Случай, когда $f(x)$ цѣлая функція первой степени, исключаемъ изъ разсмотрѣнія, потому что тогда траекторіей точки можетъ быть, очевидно, только вертикальная прямая, какъ бы ни выражалось сопротивленіе среды.

Затѣмъ изъ условій задачи очевидно, что въ разсматриваемомъ движеніи траекторія точки всегда имѣетъ выпуклость вверхъ, поэтому и кривая (1_1), по крайней мѣрѣ, въ нѣкоторой части, должна быть *обращена выпуклостью также вверхъ;* при движеніи точки по этой части кривой скорость можетъ обратиться въ нуль или получить вертикальное направленіе только тамъ, гдѣ точка оставляетъ кривую, ибо далѣе она описываетъ тогда вертикальную прямую.

Уравненія движенія въ настоящемъ случаѣ будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \quad - Rx' \\ y'' &= g - Ry' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2_1)$$

Находимъ:

$$x'^2 = \frac{g}{f_{\prime\prime}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3_1)$$

слѣдовательно,

$$x' = \sqrt{\frac{g}{f_{\prime\prime}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4_1)$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ движеніи x' не обращается въ нуль, то знакъ предъ радикаломъ опредѣляется начальнымъ значеніемъ x'_0.

Далѣе получаемъ:

$$R = \frac{\sqrt{g}}{2} \cdot \frac{f_{\prime\prime\prime}}{f_{\prime\prime}\sqrt{f_{\prime\prime}}} \ldots\ldots\ldots\ldots (5_1)$$

гдѣ знакъ предъ радикаломъ $\sqrt{f_{\prime\prime}}$ тотъ же, что и въ формулѣ (4_1);

$$v = \sqrt{\frac{g}{f_{\prime\prime}}(1+f_{\prime}^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots (6_1)$$

и, наконецъ,

$$Rv = \frac{g}{2} \cdot \frac{f_{\prime\prime\prime}}{f_{\prime\prime}^2} \sqrt{1+f_{\prime}^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (7_1)$$

Функція f во всѣхъ точкахъ той части кривой, по которой движеніе совершается, должна удовлетворять двумъ условіямъ:

$$f_{,,} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{f_{,,,}}{\sqrt{f_{,,}}} \gtrless 0.$$

Первое условіе будетъ удовлетворено, если начальное положеніе точки находится въ той части кривой, которая обращена своей выпуклостью вверхъ.

Такъ какъ предъ радикаломъ $\sqrt{f_{,,}}$ подразумѣвается знакъ, который имѣетъ x', то и второму условію мы можемъ всегда удовлетворить, взявши изъ двухъ направленій касательной въ начальномъ положеніи точки за направленіе ея начальной скорости именно то, для котораго x'_0 имѣетъ тотъ же знакъ, что и $f_{,,,}$ при $x = x_0$; при этомъ величина начальной скорости въ силу ур. (6_1) вполнѣ опредѣляется начальнымъ положеніемъ точки.

При такихъ начальныхъ данныхъ матеріальная точка, двигаясь при дѣйствіи силы тяжести и сопротивленія среды, выражаемаго по формулѣ (7_1), будетъ описывать данную кривую (1_1) до тѣхъ поръ, пока случится какое-либо изъ слѣдующихъ трехъ обстоятельствъ: или $f_{,,}$ получитъ отрицательное значеніе, или $f_{,,}$ обратится въ безконечность, или $f_{,,,}$ измѣнитъ свой знакъ; — въ каждомъ изъ этихъ случаевъ точка сойдетъ съ кривой (1_1), если масса ея не будетъ равна нулю.

§ 3. Тяжелая точка въ сопротивляющейся средѣ описываетъ параболу.

Разсмотримъ частный случай предыдущей задачи, *когда данная кривая (1_1) есть парабола.*

Изъ ур. (5_1) слѣдуетъ, что парабола съ **вертикальною** осью можетъ быть траекторіей тяжелой точки только тогда, когда она движется въ пустотѣ.

Если ось параболы составляетъ нѣкоторый уголъ съ вертикаль-

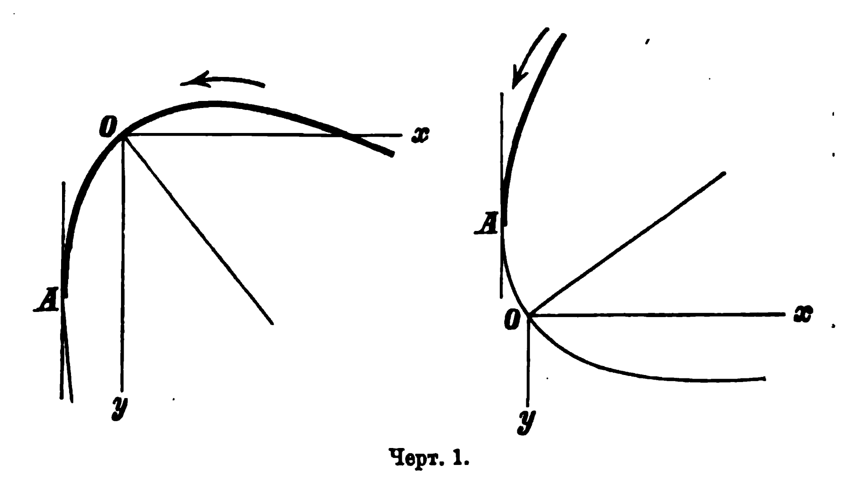
ною линіей, то въ одной изъ своихъ точекъ парабола имѣетъ вертикальную касательную; эта точка дѣлитъ параболу на двѣ части, которыя можно назвать верхнею и нижнею, потому что при пересѣченіи параболы вертикальными сѣкущими всѣ точки одной части лежатъ выше соотвѣтствующихъ точекъ другой; на основаніи того, что выше изложено, мы заключаемъ, что верхняя часть параболы и можетъ служить траекторіей тяжелой точки въ сопротивляющейся средѣ.

Но для того, чтобы узнать, въ какую сторону будетъ двигаться точка по параболѣ, гдѣ она съ нея сойдетъ и какъ будетъ выражаться сопротивленіе среды, нужно составить выраженія первой, второй и третьей производной отъ функціи $f(x)$ для настоящаго случая.

Пусть

$$Y_1 = \frac{1}{2p} X_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

уравненіе параболы, ось которой составляетъ нѣкоторый уголъ съ вертикалью; будемъ отсчитывать этотъ уголъ отъ вертикальной линіи, направленной внизъ, въ такую сторону, чтобъ онъ заключался между 0 и π; обозначимъ его чрезъ φ.



Черт. 1.

Вершину параболы примемъ за начало координатъ, ось Oy возьмемъ по вертикали внизъ, а ось Ox направимъ такимъ образомъ,

чтобъ она составляла съ осью параболы уголъ, не бóльшій прямого (черт. 1); тогда ур. (8) преобразуется въ слѣдующее уравненіе:

$$y = x \operatorname{Cotg} \varphi + p \frac{\operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Sin}^2 \varphi} \pm \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \varphi} \sqrt{p^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi + 2px \operatorname{Sin} \varphi} = f(x). \quad (9)$$

Точкамъ верхней части параболы соотвѣтствуетъ знакъ — предъ радикаломъ; для этихъ точекъ мы имѣемъ:

$$f_{\prime} = \operatorname{Cotg} \varphi - \frac{p}{\operatorname{Sin} \varphi} (p^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi + 2px \operatorname{Sin} \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_{\prime\prime} = p^2 (p^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi + 2px \operatorname{Sin} \varphi)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_{\prime\prime\prime} = -3p^3 \operatorname{Sin} \varphi (p^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi + 2px \operatorname{Sin} \varphi)^{-\frac{5}{2}};$$

координаты точки A, въ которой касательная вертикальна, будутъ:

$$x_1 = -\frac{1}{2} p \frac{\operatorname{Cos}^2 \varphi}{\operatorname{Sin} \varphi}$$

$$y_1 = \frac{1}{2} p \frac{\operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Sin}^2 \varphi} (1 + \operatorname{Sin}^2 \varphi).$$

Знакъ производной x', какъ было замѣчено въ § 2, долженъ быть тотъ же, что и знакъ $f_{\prime\prime\prime}$, поэтому изъ выраженія $f_{\prime\prime}$ въ настоящемъ случаѣ мы заключаемъ, что $x' < 0$, и, слѣдовательно, начальная скорость должна быть направлена по касательной къ параболѣ въ одной изъ точекъ ея верхней части именно въ ту сторону, гдѣ лежитъ точка A; величина начальной скорости опредѣляется изъ ур. (6), полагая въ немъ $x = x_0$.

Затѣмъ, такъ какъ $f_{\prime\prime\prime}$ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ и $f_{\prime\prime}$ нигдѣ, кромѣ точки A, въ безконечность не обращается, то движущаяся точка можетъ сойти съ параболы только въ точкѣ A.

Изъ ур. (6_1) слѣдуетъ, что скорость движущейся точки въ точкѣ A равна нулю.

Двигаясь по направленію къ точкѣ A, тяжелая точка проходитъ

чрезъ вершину параболы только въ томъ случаѣ, когда уголъ φ менѣе $\frac{\pi}{2}$; скорость ея въ этотъ моментъ равна

$$\sqrt{gp\,\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

Величину сопротивленія мы выразимъ въ функціи отъ x по формулѣ (7), подставляя въ нее вмѣсто $f_{\prime}, f_{\prime\prime}, f_{\prime\prime\prime}$ только что полученныя выраженія этихъ производныхъ.

Для того, чтобы движеніе точки было опредѣлено вполнѣ, намъ остается выразить ея координаты x и y въ функціяхъ времени t.

Ур. (4_1) представляется въ видѣ:

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{p^2}}\,(p^2\,\mathrm{Cos}^2\varphi + 2px\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^{\frac{3}{4}};$$

интегрируя, находимъ:

$$\frac{2}{\mathrm{Sin}\,\varphi}\,(p^2\,\mathrm{Cos}^2\varphi + 2px\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^{\frac{1}{4}} = -\sqrt{g}\,(t - t_1)\;\ldots(10)$$

гдѣ t_1 величина постоянная; отсюда

$$x = -\frac{p}{2}\,\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} + \frac{g^2}{32p}\,\mathrm{Sin}^3\varphi\cdot(t - t_1)^4.$$

Подставляя это выраженіе въ ур. (9), получимъ y въ функціи отъ t.

Въ точкѣ A

$$p^2\,\mathrm{Cos}^2\varphi + 2px_1\,\mathrm{Sin}\,\varphi = 0,$$

поэтому изъ ур. (10) мы видимъ, что движущаяся точка приходитъ въ точку A въ моментъ t_1, слѣдовательно, въ моментъ

$$t = \frac{2}{\sqrt{g}\,\mathrm{Sin}\,\varphi}\,(p^2\,\mathrm{Cos}^2\varphi + 2px_0\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^{\frac{1}{4}},$$

если положимъ, что въ начальный моментъ $t = 0$.

§ 4. Задачи § 2 и § 3 въ предположеніи, что ось Oy не совпадаетъ съ направленіемъ силы тяжести.

Въ частныхъ случаяхъ задачи § 2 изслѣдованіе нѣкоторыхъ обстоятельствъ движенія точки можетъ быть упрощено, если не ограничивать выбора координатныхъ осей условіемъ, чтобъ ось Oy была вертикальна.

Найдемъ выраженія для сопротивленія среды и скорости точки въ нашей задачѣ, предполагая, что уравненіе кривой

$$y = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1_2)$$

отнесено къ координатнымъ осямъ, которыя составляютъ съ вертикальною линіей, направленной внизъ, углы: ось Oy уголъ φ, заключающійся между 0 и π, а ось Ox уголъ, равный $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Уравненія движенія точки представляются въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -a - Rx' \\ y'' &= b - Ry' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2_2)$$

гдѣ

$$a = g \operatorname{Sin} \varphi, \qquad b = g \operatorname{Cos} \varphi.$$

Изъ ур. (1_2) и (2_2) получаемъ, какъ указано въ § 1:

$$x' = \pm\sqrt{\frac{b + af_{\prime}}{f_{\prime\prime}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4_2)$$

$$R = -\frac{3a}{2x'} + \frac{x' f_{\prime\prime\prime}}{2 f_{\prime\prime}} = \frac{-3af_{\prime\prime}^2 + (b + af_{\prime}) f_{\prime\prime\prime}}{2\sqrt{(b + af_{\prime}) f_{\prime\prime}^3}} \quad \ldots (5_2)$$

гдѣ знакъ предъ радикаломъ въ формулѣ (5_2) долженъ быть взятъ тотъ же, что въ формулѣ (4_2), и наконецъ

$$v = \sqrt{\frac{1}{f_{\prime\prime}} (b + af_{\prime})(1 + f_{\prime}^2)} \quad \ldots\ldots\ldots (6_2)$$

Въ случаѣ *параболы*, полагая, что начало координатъ находится въ вершинѣ кривой и ось Oy совпадаетъ съ ея осью, имѣемъ:

$$y = \frac{1}{2p} x^2,$$

слѣдовательно, такъ какъ должно быть $x' < 0$,

$$R = \frac{3a}{2\sqrt{bp + ax}};$$

далѣе

$$v = \frac{1}{p} \sqrt{(bp + ax)(p^2 + x^2)},$$

поэтому величина сопротивленія

$$Rv = \frac{3a}{2p} \sqrt{p^2 + x^2}.$$

Полученныя выраженія для сопротивленія среды и скорости точки допускаютъ простое геометрическое толкованіе.

Съ помощью уравненія параболы формула, выражающая Rv, можетъ быть представлена въ видѣ:

$$Rv = \frac{3a}{2\sqrt{p}} \sqrt{p + 2y};$$

обозначимъ чрезъ ρ радіусъ-векторъ движущейся точки, проведенный изъ фокуса параболы (черт. 2); тогда, по свойству параболы,

$$\rho = y + \frac{p}{2}$$

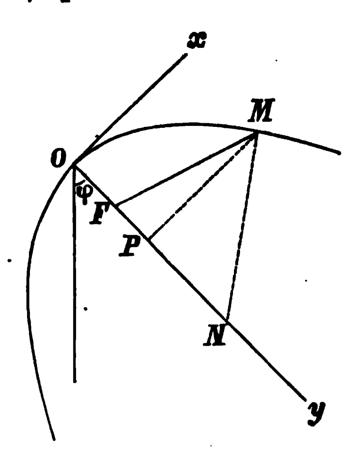
и, слѣдовательно,

$$Rv = \frac{3g \operatorname{Sin} \varphi}{\sqrt{2p}} \sqrt{\rho}.$$

Такимъ образомъ мы нашли, что *сопротивленіе среды въ разсматриваемомъ движеніи пропорціонально корню квадратному изъ разстоянія движущейся точки отъ фокуса параболы.*

Формула, выражающая величину скорости точки, если ввести въ нее ρ, представится въ видѣ:

$$v = \sqrt{\frac{2g}{p}} \cdot \sqrt{\rho\,(p \operatorname{Cos}\varphi + x \operatorname{Sin}\varphi)}.$$



Черт. 2.

Пусть M положеніе движущейся точки на параболѣ, P основаніе перпендикуляра MP, опущеннаго на ось, и N точка пересѣченія нормали MN съ осью, тогда поднормаль $PN = p$, а потому проекція отрѣзка нормали MN на вертикальную линію по своей величинѣ равна $p \operatorname{Cos}\varphi + x \operatorname{Sin}\varphi$; обозначимъ величину этой проекціи чрезъ δ, тогда можемъ написать:

$$v = \sqrt{\frac{2g}{p}} \cdot \sqrt{\rho\delta},$$

слѣдовательно, *въ разсматриваемомъ движеніи скорость движущейся точки пропорціональна среднему геометрическому изъ разстоянія точки отъ фокуса параболы и вертикальной проекціи отрѣзка нормали между точкою и осью.*

§ 5. Тяжелая точка въ средѣ постоянной плотности при сопротивленіи пропорціональномъ n-ой степени скорости.

До сихъ поръ мы не ограничивали какимъ-либо условіемъ зависимости между величиною сопротивленія среды и скоростью точки;

предположимъ теперь, что *плотность среды постоянна и сопротивленіе пропорціонально нѣкоторой степени скорости,* такъ что въ выраженіи

$$Rv = SV$$

множитель

$$V = \varepsilon v^n,$$

гдѣ ε и n данныя числа.

Съ помощью формулъ (5_2) и (6_2) мы выразимъ тогда въ функціи отъ x другой множитель S, который измѣняется въ зависимости отъ измѣненія массы:

$$S = \frac{f_{,,}^{\frac{n}{2}-2}\left[-3af_{,,}^2 + (b + af_{,})f_{,,,}\right]}{2\varepsilon(1+f_{,}^2)^{\frac{n-1}{2}}(b+af_{,})^{\frac{n}{2}}} \ldots\ldots\ldots (11)$$

гдѣ

$$a = g \operatorname{Sin}\varphi, \qquad b = g \operatorname{Cos}\varphi,$$

и, такъ какъ S величина положительная, то берется абсолютная величина выраженія, стоящаго въ правой части, со знакомъ $+$.

Полагая въ этой формулѣ $a=0$ и $b=g$, получимъ выраженіе S для случая, когда уравненіе данной кривой написано въ предположеніи, что ось Oy направлена по вертикали внизъ.

Въ томъ случаѣ, когда данная кривая парабола, уравненіе которой

$$y = \frac{1}{2p}x^2,$$

формула (11) представляется въ видѣ:

$$S = \frac{3a}{2\varepsilon} \cdot \frac{p^{n-1}}{(p^2+x^2)^{\frac{n-1}{2}}(bp+ax)^{\frac{n}{2}}} \ldots\ldots\ldots (12)$$

Введемъ въ это уравненіе величины ρ и δ, геометрическое значеніе которыхъ выше указано; тогда мы получимъ:

$$S = \frac{3\operatorname{Sin}\varphi}{2\varepsilon g^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{\delta}}\left(\frac{p}{2\rho\delta}\right)^{\frac{n-1}{2}} \ldots\ldots\ldots (13)$$

§ 6. Двѣ задачи о параболическомъ движенiи центра тяжелаго однороднаго шара въ воздухѣ.

Выведенныя формулы получаютъ нѣкоторую *наглядность*, если мы примѣнимъ ихъ къ рѣшенiю, напримѣръ, слѣдующаго вопроса.

1. *Какъ долженъ измѣняться радiусъ тяжелаго однороднаго шара для того, чтобы центръ шара при нѣкоторомъ начальномъ положенiи и начальной скорости, соотвѣтственнымъ образомъ опредѣленныхъ, описалъ дугу заданной по формѣ и положенiю параболы, предполагая, что движенiе происходитъ въ воздухѣ, сопротивленiе котораго принимается пропорцiональнымъ площади большого круга шара и n-ой степени скорости его центра.*

Пусть ε будетъ величина сопротивленiя, которое испытываетъ шаръ радiуса, равнаго единицѣ, когда центръ его имѣетъ скорость, равную единицѣ; обозначая чрезъ r и σ радiусъ и плотность шара, мы получимъ такое выраженiе для сопротивленiя среды, разсчитаннаго на единицу массы:

$$Rv = \frac{3\varepsilon}{\sigma r} v^n,$$

слѣдовательно,

$$S = \frac{3}{\sigma r}.$$

Такъ какъ движенiе центра шара выражается ур. (2_2), то мы можемъ воспользоваться выведенными уже формулами.

Формулы (12) и (13) даютъ намъ:

$$\left.\begin{array}{l} r = \dfrac{2\varepsilon g^{\frac{n}{2}-1}}{\sigma \operatorname{Sin}\varphi} p^{1-n} (p^2 + x^2)^{\frac{n-1}{2}} (p \operatorname{Cos}\varphi + x \operatorname{Sin}\varphi)^{\frac{n}{2}} \\ \text{или} \\ r = \dfrac{2\varepsilon g^{\frac{n}{2}-1}}{\sigma \operatorname{Sin}\varphi} \sqrt{\delta} \left(\dfrac{2\rho\delta}{p}\right)^{\frac{n-1}{2}} \end{array}\right\} \ldots (14)$$

Формулы (14) и представляютъ отвѣтъ на вопросъ; давая n раз-

личныя частныя значенія, получимъ соотвѣтствующіе законы измѣненія радіуса; укажемъ нѣкоторыя слѣдствія формулъ (14).

Въ той точкѣ, гдѣ центръ шара долженъ оставить параболу, касательная вертикальна, слѣдовательно $\delta = 0$, а тогда изъ ур. (14) видно, что при $n > 0$ въ этой точкѣ $r = 0$; слѣдовательно, когда сопротивленіе пропорціонально какой-либо положительной степени скорости, то во все время, пока происходитъ движеніе шара, центръ его остается на параболѣ.

При $n = 1$

$$r = \frac{2\varepsilon}{\sigma \sqrt{g} \operatorname{Sin} \varphi} \sqrt{\delta}$$

и, слѣдовательно, r непрерывно уменьшается до нуля.

При $n > 1$, — если ось параболы горизонтальна или составляетъ тупой уголъ съ вертикальною линіей, направленной внизъ, то радіусъ шара непрерывно уменьшается до нуля; въ случаѣ остраго угла радіусъ также непрерывно уменьшается до нуля, если

$$tg^2 \varphi \geqslant \frac{(n-1)^2}{n(3n-2)};$$

если же

$$tg^2 \varphi < \frac{(n-1)^2}{n(3n-2)},$$

то радіусъ уменьшается, пока центръ не перейдетъ чрезъ вершину параболы, но далѣе есть часть пути, на которой радіусъ возрастаетъ, и затѣмъ уже онъ убываетъ до нуля.

При сопротивленіи, пропорціональномъ квадрату скорости, ускореніе силы тяжести не входитъ въ выраженіе r:

$$r = \frac{2\sqrt{2}\,\varepsilon}{\sigma \sqrt{p} \operatorname{Sin} \varphi} \cdot \delta \sqrt{\rho}.$$

2. Въ предыдущемъ примѣрѣ предполагалось, что парабола намъ вполнѣ задана; теперь мы рѣшимъ слѣдующую задачу:

Тяжелый однородный шаръ движется въ воздухѣ, сопротивленіе котораго принимается пропорціональнымъ площади боль-

щого круга шара и n-ой степени скорости его центра; заданы для начальнаго положенія: радіусъ шара, положеніе и скорость его центра, составляющая нѣкоторый уголъ съ вертикалью; опредѣлить, какъ долженъ измѣняться радіусъ шара для того, чтобы центръ его описалъ дугу параболы.

Условимся отсчитывать углы отъ вертикальной линіи, направленной внизъ, въ такую сторону, чтобъ уголъ, соотвѣтствующій направленію данной начальной скорости, былъ болѣе 180°; тогда, какъ видно изъ предыдущаго, уголъ φ, опредѣляющій направленіе оси параболы, будетъ менѣе 180°.

Обозначимъ проекціи начальной скорости на вертикальную линію, направленную внизъ, и на составляющую съ ней уголъ 90° горизонтальную чрезъ u и h, такъ что всегда $h<0$ и $h^2+u^2=v_0^2$.

Начальное положеніе центра шара примемъ за начало координатъ и напишемъ уравненіе параболы въ видѣ:

$$y-\beta=\frac{1}{2p}(x-\alpha)^2,$$

гдѣ α, β, p такъ же, какъ и уголъ φ, опредѣлятся изъ условій задачи.

Пусть x'_0 и y'_0 будутъ проекціи начальной скорости центра на оси Ox и Oy, тогда

$$\left.\begin{aligned} x'_0 &= h\operatorname{Cos}\varphi-u\operatorname{Sin}\varphi \\ y'_0 &= h\operatorname{Sin}\varphi+u\operatorname{Cos}\varphi \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

Для начальнаго момента имѣемъ уравненія:

$$-\beta=\frac{1}{2p}\alpha^2$$

$$y'_0=-\frac{1}{p}\alpha x'_0$$

$$x_0'^2=g(p\operatorname{Cos}\varphi-\alpha\operatorname{Sin}\varphi),$$

откуда

$$\alpha = -\frac{x'^2_0 y'_0}{gh}, \quad \beta = -\frac{x'_0 y'^2_0}{2gh}, \quad p = \frac{x'^3_0}{gh} \ldots (16)$$

Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ

$$Rv = \frac{3\varepsilon}{\sigma r} v^n,$$

то изъ ур. (5_2) и (6_2) или изъ перваго уравненія (14), замѣняя въ немъ x чрезъ $x-\alpha$, получаемъ слѣдующую зависимость между r и x:

$$r = \frac{2\varepsilon g^{\frac{n}{2}-1}}{\sigma \operatorname{Sin}\varphi} p^{1-n} [p^2 + (x-\alpha)^2]^{\frac{n-1}{2}} [p \operatorname{Cos}\varphi + (x-\alpha)\operatorname{Sin}\varphi]^{\frac{n}{2}}. (17)$$

Отнесемъ это уравненіе къ начальному моменту и подставимъ вмѣсто α и p ихъ значенія по формуламъ (16); имѣя въ виду формулы (15), получимъ:

$$r_0 = \frac{2\varepsilon v_0^{n-1}}{\sigma g \operatorname{Sin}\varphi} (h \operatorname{Cos}\varphi - u \operatorname{Sin}\varphi);$$

отсюда

$$tg\,\varphi = \frac{2\varepsilon h v_0^{n-1}}{\sigma g r_0 + 2\varepsilon u v_0^{n-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Такъ какъ $\varphi < \pi$, то ур. (18) даетъ для φ только одно значеніе.

Зная φ, съ помощью формулъ (15) и (16) мы найдемъ α, β и p; такимъ образомъ всѣ элементы параболы будутъ опредѣлены, причемъ всегда $p > 0$ и $\beta \leqslant 0$; а затѣмъ выраженіе для r въ функціи отъ x мы получимъ изъ формулы (17).

II. Скорость измѣняющей массы равна нулю.

Разсмотримъ обратныя задачи въ томъ случаѣ, когда *при измѣненіи массы точки происходятъ удары вслѣдствіе того, что скорость измѣняющей массы равна нулю.*

§ 7. Связь между случаями I и II.

Пусть движеніе точки происходитъ въ средѣ, сопротивленіе которой противоположно скорости точки и по величинѣ равно Kv; предполагаемъ, что масса точки можетъ быть выражена нѣкоторой функціей ея координатъ и времени; тогда уравненія движенія будутъ:

$$\left. \begin{array}{l} m\frac{d^2x}{dt^2} = m\,X - \left(K + \frac{dm}{dt}\right)x' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \ldots\ldots\ldots (19)$$

Для движенія точки въ пустотѣ имѣютъ мѣсто тѣ же уравненія (19) при $K = 0$.

Обозначимъ

$$\frac{1}{m}\left(K + \frac{dm}{dt}\right) = R; \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

тогда ур. (19) получатъ тотъ же видъ, который имѣютъ и уравненія движенія точки въ сопротивляющейся средѣ при отсутствіи ударовъ, съ тою лишь разницей, что здѣсь R можетъ быть не только положительной, но и отрицательной величиной.

Поэтому къ обратнымъ задачамъ въ томъ случаѣ, когда скорость измѣняющей массы равна нулю, примѣнимо то же изслѣдованіе, что и тогда, когда при движеніи въ средѣ скорость измѣняющей массы равна скорости движущейся точки; только въ настоящемъ случаѣ отпадаютъ условія, которыя вытекаютъ изъ того обстоятельства, что сопротивленіе среды и скорость точки направлены противоположно другъ другу.

Послѣ того, какъ найдемъ выраженіе R, ур. (20) послужитъ намъ для опредѣленія m, если будетъ извѣстна зависимость между K и m.

Если заданы X и Y, проекціи силы, приложенной къ точкѣ и разсчитанной на единицу массы, и, кромѣ того, уравненіе траекторіи, тогда координаты точки, какъ мы видѣли въ § 1, выражаются нѣко-

торыми функціями времени, независимо отъ величины R; выразивши затѣмъ въ ур. (20) R, какъ функцію отъ t, и K, какъ функцію отъ t и m, мы получимъ дифференціальное уравненіе перваго порядка; интегрируя его, опредѣлимъ массу точки, какъ функцію времени.

§ 8. Тяжелая точка описываетъ данную плоскую кривую, въ частности, параболу.

Для примѣра возьмемъ *задачу, въ которой, предполагая, что скорость измѣняющей массы равна нулю, требуется опредѣлить законъ измѣненія массы тяжелой точки изъ того условія, что эта точка описываетъ дугу данной кривой, лежащей въ вертикальной плоскости.*

Необходимо и здѣсь, чтобъ, по крайней мѣрѣ, часть кривой была обращена своей выпуклостью в в е р х ъ, такъ какъ равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ точкѣ: силы тяжести, сопротивленія среды и прибавочной силы, направлена въ ту же сторону отъ касательной къ траекторіи, въ которую направлена вертикаль, проведенная внизъ.

Пусть

$$y = f(x)$$

уравненіе данной кривой и φ уголъ, образуемый координатною осью Oy съ вертикальною линіей, направленной внизъ.

1. Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда точка движется *въ пустотѣ:*

$$R = \frac{d \log m}{dt}.$$

Формулы (4_2) и (5_2) позволяютъ намъ написать выраженіе R въ видѣ:

$$R = \frac{-3af_{,,}^2 + (b + af_{,})f_{,,,}}{2f_{,,}(b + af_{,})}\, x',$$

гдѣ $a = g \operatorname{Sin} \varphi$ и $b = g \operatorname{Cos} \varphi$.

8

Предполагая, что мы ищемъ выраженіе для m въ функціи отъ одной перемѣнной x, имѣемъ:

$$\frac{d \log m}{dt} = \frac{d \log m}{dx} x',$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{d \log m}{dx} = -\frac{3}{2} a \frac{f_{,,}}{b + af_{,}} + \frac{f_{,,,}}{2f_{,,}}.$$

Интегрируя, находимъ

$$m = C \sqrt{\frac{f_{,,}}{(b + af_{,})^3}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

гдѣ постоянная C опредѣляется начальнымъ значеніемъ m.

Пусть данная кривая *парабола* параметра p.

Если ось параболы направлена по вертикали внизъ, то изъ ур. (21) слѣдуетъ, что масса точки должна быть *постоянной*.

Если ось параболы составляетъ уголъ φ съ вертикальною линіей, направленной внизъ, то

$$m = \frac{Cp}{g \sqrt{g} (p \operatorname{Cos} \varphi + x \operatorname{Sin} \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

или

$$m = \frac{Cp}{(g\delta)^{\frac{3}{2}}},$$

гдѣ δ имѣетъ то же геометрическое значеніе, что и въ § 4.

2. Переходимъ къ движенію тяжелой точки *въ сопротивляющейся средѣ.*

Для того, чтобы имѣть опредѣленную зависимость между сопротивленіемъ среды и массою точки, мы возьмемъ тотъ случай, когда *тяжелый однородный шаръ перемѣннаго радіуса движется въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально площади боль-*

щого круга шара и n-ой степени скорости его центра; наша задача: *опредѣлить, какъ долженъ измѣняться радіусъ шара для того, чтобы центръ его при нѣкоторыхъ начальныхъ данныхъ описалъ дугу кривой, заданной по формѣ и положенію: $y=f(x)$,— предполагая, что скорость центра инерціи измѣняющихъ частицъ равна нулю.*

Въ настоящемъ случаѣ, при тѣхъ же значеніяхъ буквъ: ε, σ и r, что въ § 6,

$$R = \frac{3\varepsilon}{\sigma r} v^{n-1} + \frac{3}{r}\frac{dr}{dt},$$

слѣдовательно,

$$R = \frac{3\varepsilon}{\sigma r} x'^{n-1} (1 + f_{,}^{2})^{\frac{n-1}{2}} + \frac{3}{r}\frac{dr}{dx} x'.$$

Мы уже имѣли:

$$R = \frac{-3af_{,,}^{2} + (b + af_{,})f_{,,,}}{2f_{,,}(b + af_{,})} x';$$

приравниваемъ эти выраженія R другъ другу; принимая во вниманіе формулу (4_2):

$$x' = \pm \sqrt{\frac{b + af_{,}}{f_{,,}}},$$

мы получимъ такимъ образомъ обыкновенное линейное дифференціальное уравненіе перваго порядка, которое и послужитъ для опредѣленія r въ функціи отъ x:

$$\frac{dr}{dx} + r\left[\frac{af_{,,}}{2(b + af_{,})} - \frac{f_{,,,}}{6f_{,,}}\right] \pm \frac{\varepsilon}{\sigma}(1 + f_{,}^{2})^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{b + af_{,}}{f_{,,}}\right)^{\frac{n-2}{2}} = 0 \ldots (22)$$

послѣдній членъ долженъ быть взятъ здѣсь съ тѣмъ знакомъ, который имѣетъ начальное значеніе x'. Постоянная произвольная, которая войдетъ при интегрированіи, опредѣляется начальнымъ значеніемъ r.

Пусть данная кривая — *парабола* параметра p съ вертикальною осью, направленною внизъ.

Полагая, что ось Oy направлена по оси параболы, имѣемъ:

$$a = 0, \quad b = g, \quad f(x) = \frac{1}{2p} x^2,$$

поэтому ур. (22) даетъ:

$$\frac{dr}{dx} = \mp \frac{\varepsilon g^{\frac{n-2}{2}}}{\sigma p^{\frac{n}{2}}} (p^2 + x^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

и, слѣдовательно, r при всѣхъ цѣлыхъ значеніяхъ n, а также при $n = 0$, выражается въ конечномъ видѣ въ функціи отъ x.

Такъ какъ знакъ производной $\frac{dr}{dx}$ противоположенъ знаку x', поэтому во время движенія радіусъ шара непрерывно убываетъ.

Замѣтимъ, что въ настоящемъ случаѣ $R = 0$ и, слѣдовательно, прибавочная сила равна и противоположна сопротивленію среды.

3. Укажемъ еще рѣшеніе задачи 2-й § 6 въ *предположеніи, что скорость центра инерціи измѣняющихъ частицъ равна нулю.*

Формулы (16) имѣютъ мѣсто и здѣсь.

Направленіе оси параболы, т. е. уголъ φ опредѣляется двумя способами съ помощью ур. (22), полагая

$$f(x) = \frac{1}{2p} (x - \alpha)^2.$$

1-й способъ. Если заданы для начальнаго момента: длина радіуса и значеніе его первой производной, напримѣръ, по времени — r_0 и $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$, тогда мы выразимъ $\left(\frac{dr}{dx}\right)_0$ чрезъ φ, ибо

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dr}{dx}\right)_0 x'_0,$$

и уголъ φ опредѣлимъ затѣмъ изъ ур. (22), отнеся его къ начальному моменту.

Интегрированіе ур. (22) служитъ только для опредѣленія r.

2-й способъ. Если задана длина радіуса въ начальный моментъ и, кромѣ того, въ нѣкоторый моментъ $t=t_1$, то мы найдемъ сначала, съ помощью уравненія:

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{b+af_{,}}{f_{,,}}}$$

и начальныхъ данныхъ, значеніе $x=x_1$, соотвѣтствующее моменту t_1; x_1 выразится извѣстнымъ образомъ чрезъ t_1 и φ; проинтегрировавши затѣмъ ур. (22), замѣнимъ въ интегральномъ уравненіи r и x одинъ разъ чрезъ r_0 и x_0, другой разъ чрезъ r_1 и x_1, тогда получимъ два уравненія, которыя и могутъ служить для опредѣленія угла φ и постоянной произвольной, вошедшей при интегрированіи.

III. Скорость измѣняющей массы направлена по одной прямой со скоростью точки.

§ 9. Связь между случаями II и III.

Укажемъ еще на обратныя задачи въ томъ случаѣ, когда *скорости измѣняющей массы и точки направлены по одной прямой.*

Пусть будетъ k отношеніе скорости измѣняющей массы къ скорости точки, взятое со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, направлены ли эти скорости въ одну сторону или въ стороны противоположныя.

Обозначимъ чрезъ Kv величину сопротивленія среды, которое точка испытываетъ при своемъ движеніи; тогда, предполагая, что масса точки можетъ быть выражена нѣкоторою функціей координатъ точки и времени, мы получимъ уравненія движенія въ видѣ:

$$\left.\begin{array}{l} mx''=mX-Kx'+\frac{dm}{dt}(k-1)\,x' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ldots\ldots(23)$$

Полагая

$$\frac{1}{m}\left[K - (k-1)\frac{dm}{dt}\right] = R \ldots\ldots\ldots (24)$$

мы приведемъ ур. (23) къ тому же виду, къ которому приводятся ур. (19) въ случаѣ II.

Слѣдовательно, и здѣсь мы можемъ примѣнить къ обратнымъ задачамъ то же изслѣдованіе, что и въ случаѣ I, принимая при этомъ однако во вниманіе, что R можетъ имѣть теперь не только положительныя, но и отрицательныя значенія.

Послѣ того, какъ по даннымъ условіямъ мы найдемъ выраженіе для R, ур. (24) послужитъ для опредѣленія m, если, кромѣ зависимости между K и m, намъ будетъ извѣстно отношеніе k, которое можетъ быть величиною перемѣнной или постоянной.

ГЛАВА VI.

ДВИЖЕНІЕ ТЯЖЕЛОЙ ТОЧКИ.

§ 1. Уравненія движенія. Случай, когда геометрическая разность скоростей измѣняющей массы и точки постоянна по величинѣ и направленію.

1. Уравненія движенія тяжелой точки перемѣнной массы, которая выражается функціей времени, положенія точки и длины пройденнаго ею пути, въ общемъ случаѣ, если мы направимъ ось Oz по вертикали вверхъ, представляются въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}(\alpha - x') - \mathrm{R}\frac{x'}{v} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}(\beta - y') - \mathrm{R}\frac{x'}{v} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g + \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}(\gamma - z') - \mathrm{R}\frac{z'}{v} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(1)$$

гдѣ α, β, γ обозначаютъ проекціи скорости измѣняющей массы, R — сопротивленіе среды, разсчитанное на единицу массы точки, и

$$m = f(t, x, y, z, s).$$

Простѣйшій случай, въ которомъ ур. (1) интегрируются въ квадратурахъ, мы имѣемъ тогда, когда масса точки и величины α, β, γ выражаются данными функціями времени, а сопротивленіе

среды или равно нулю, или пропорціонально скорости точки, причемъ коеффиціентъ пропорціональности также данная функція времени.

2. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, когда тяжелое твердое тѣло перемѣнной массы движется поступательно, мы можемъ считать извѣстною относительную скорость, по отношенію къ тѣлу, центра инерціи измѣняющихъ частицъ; въ этихъ случаяхъ въ соотвѣтствующихъ задачахъ о движеніи тяжелой точки перемѣнной массы намъ будетъ извѣстна по величинѣ и направленію геометрическая разность w между скоростями измѣняющей массы и точки.

Разсмотримъ случай, когда *масса тяжелой точки выражается какою-либо функціей времени, положенія точки и длины пройденнаго пути, а геометрическая разность w остается постоянною по величинѣ и направленію.*

Начальное положеніе точки примемъ за начало координатъ, вертикальную плоскость, въ которой заключается геометрическая разность w въ начальный моментъ, возьмемъ за плоскость xz; тогда

$$\alpha - x' = a, \quad \beta - y' = 0, \quad \gamma - z' = c,$$

гдѣ a и c постоянныя величины; обозначимъ затѣмъ $\log m$ чрезъ μ и положимъ, что въ начальный моментъ при $t = 0$ масса точки равна единицѣ.

Пусть движеніе точки происходитъ въ пустотѣ; тогда уравненія движенія въ разсматриваемомъ случаѣ будутъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d\mu}{dt}a \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g + \frac{d\mu}{dt}c, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ $\mu = \log f(t, x, y, z, s)$.

Легко написать пять интеграловъ ур. (2), которые имѣютъ мѣсто при всякомъ видѣ функціи f:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a\mu + x'_0 \\ y' &= y'_0 \\ z' &= c\mu - gt + z'_0 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

$$\left.\begin{aligned} y &= y'_0 t \\ cx - az &= \frac{1}{2} agt^2 + (cx'_0 - az'_0) t \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (4)$$

гдѣ x'_0, y'_0, z'_0 — проекціи начальной скорости точки.

Такимъ образомъ, если масса точки не зависитъ отъ длины s пройденнаго пути, то намъ остается найти только интегралъ уравненія перваго порядка, напримѣръ, уравненія:

$$x' = a\mu + x'_0,$$

гдѣ μ будетъ выражено въ функціи отъ t и x съ помощью ур. (4), и, слѣдовательно, задача рѣшается въ квадратурахъ, когда $m = f(t, y)$ или $m = f(x)$ и т. д.; если же масса точки зависитъ и отъ длины пути s, то нужно интегрировать еще два уравненія, напримѣръ, уравненія:

$$x' = a\mu + x'_0$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

гдѣ съ помощью ур. (3) и ур. (4) μ и $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ будутъ выражены, какъ функціи отъ t, x, s.

На основаніи ур. (4) мы приходимъ къ слѣдующему заключенію относительно траекторіи точки: когда $a = 0$ или $y'_0 = 0$ точка описываетъ кривую, лежащую въ вертикальной плоскости; въ другихъ же случаяхъ траекторія точки есть кривая, расположенная на параболическомъ цилиндрѣ, производящія котораго параллельны гео-

метрической разности w между скоростями измѣняющей массы и точки; уравненіе этого цилиндра будетъ:

$$\frac{1}{2} agy^2 + (cx'_0 - az'_0) y'_0 y - y'^2_0 (cx - az) = 0 \ldots (5)$$

При $c = 0$ ур. (5) можетъ быть написано въ видѣ:

$$\left(y - \frac{y'_0 z'_0}{g}\right)^2 + \frac{2 y'^2_0}{g} \left(z - \frac{z'^2_0}{2g}\right) = 0,$$

и, слѣдовательно, производящія цилиндра параллельны оси Ox, а оси параболъ, получаемыхъ при пересѣченіи цилиндра вертикальными плоскостями, направлены по вертикали внизъ.

Когда ни a, ни y'_0 не равны нулю, траекторія точки будетъ плоскою кривою, именно параболой, только въ томъ случаѣ, если масса точки выражается показательной функціей:

$$m = e^{\varkappa t},$$

гдѣ $\varkappa$ величина постоянная.

Замѣтимъ, что въ случаѣ, только что указанномъ, когда $m = e^{\varkappa t}$ и геометрическая разность w сохраняетъ постоянныя величину и направленіе, равнодѣйствующая силы тяжести и силы прибавочной, будучи разсчитана на единицу массы, остается постоянною по величинѣ и направленію; а потому въ этомъ случаѣ задача о движеніи тяжелой точки рѣшается въ квадратурахъ и тогда, когда движеніе разсматривается въ средѣ, сопротивленіе которой, разсчитанное на единицу массы, выражается двучленомъ:

$$k_1 + k_2 v^n,$$

гдѣ k_1 и k_2 величины постоянныя.

Далѣе мы будемъ разсматривать движеніе тяжелой точки перемѣнной массы въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально квадрату скорости; при этомъ сопротивленіе, разсчитан-

ное на единицу скорости, какъ уже было выше указано, мы должны считать, вообще говоря, перемѣннымъ, хотя бы среда и имѣла одинаковую плотность.

§ 2. Сопротивленіе среды, разсчитанное на единицу массы при единицѣ скорости, функція длины пути. Скорость измѣняющей массы равна скорости точки.

Прежде всего мы займемся рѣшеніемъ слѣдующей задачи:

Опредѣлить движеніе тяжелой точки въ средѣ, оказывающей сопротивленіе, пропорціональное квадрату скорости, предполагая, что масса точки (m) и сопротивленіе, разсчитанное на единицу скорости, (k) суть нѣкоторыя данныя функціи длины пройденнаго пути и притомъ скорость измѣняющей массы равна скорости точки.

Обозначимъ чрезъ φ уголъ, образуемый касательною къ траекторіи точки съ горизонтальною линіей, которую направимъ такъ, чтобы въ начальный моментъ

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2};$$

будемъ считать положительнымъ уголъ φ, отсчитываемый внизъ отъ этой горизонтальной линіи; тогда, имѣя въ виду направленія дѣйствующихъ на точку силъ, заключаемъ, что при движеніи точки уголъ φ непрерывно возрастаетъ, но не можетъ быть болѣе $\frac{\pi}{2}$.

Дифференціальныя уравненія движенія точки въ проекціяхъ на касательную и на главную нормаль къ траекторіи, по раздѣленіи на массу, представляются въ видѣ:

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{Sin} \varphi - \frac{k}{m} v^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\frac{v^2}{\rho} = g \operatorname{Cos} \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

гдѣ

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Мы видимъ, что въ уравненія движенія m и k входятъ только въ видѣ отношенія $\frac{k}{m}$, поэтому рѣшеніе нашей задачи будетъ въ тоже время и рѣшеніемъ задачи болѣе общей, гдѣ m и k измѣняются какъ угодно, лишь бы отношеніе $\frac{k}{m}$ зависѣло только отъ длины пройденнаго пути.

Пусть

$$\frac{k}{m} = f(s);$$

функція $f(s)$, очевидно, ни при одномъ изъ положеній движущейся точки не можетъ получить отрицательнаго значенія.

Замѣняя въ ур. (6) v^2 его выраженіемъ изъ ур. (7), получимъ:

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{Sin} \varphi - gf \operatorname{Cos} \varphi \frac{ds}{d\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (6_1)$$

Ур. (7) напишемъ въ видѣ:

$$\frac{1}{v} \operatorname{Cos} \varphi \, dt = \frac{1}{g} d\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (7_1)$$

Перемножая соотвѣтствующія части уравненій (6_1) и (7_1), найдемъ:

$$\operatorname{Cos} \varphi \frac{dv}{v} = \operatorname{Sin} \varphi \, d\varphi - f \operatorname{Cos} \varphi \, ds,$$

или

$$\frac{\operatorname{Cos} \varphi \, dv - v \operatorname{Sin} \varphi \, d\varphi}{v \operatorname{Cos} \varphi} = - f ds.$$

Интегрируя, получимъ:

$$v \operatorname{Cos} \varphi = Ce^{-\int f ds} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

гдѣ C постоянная произвольная.

Изъ уравненій (7) и (8) слѣдуетъ:

$$\rho \operatorname{Cos}^3 \varphi = \frac{1}{g} C^2 e^{-2\int f ds} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Отсюда

$$e^{2\int f ds}\, ds = \frac{1}{g}\, C^2\, \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}^3\varphi}.$$

Интегрируемъ:

$$\int e^{2\int f ds}\, ds = \frac{1}{2g}\, C^2 \left[\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} - \log\, \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] + D \ldots\ldots (10)$$

гдѣ D постоянная произвольная.

Принимая во вниманіе, что

$$v = \frac{ds}{dt} = \rho\, \frac{d\varphi}{dt},$$

изъ ур. (7) находимъ:

$$dt = \sqrt{\frac{\rho}{g\, \mathrm{Cos}\,\varphi}}\, d\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Предполагая, что изъ уравненій (9) и (10) ρ выражено въ функціи отъ φ, мы выразимъ съ помощью ур. (11) t въ функціи отъ φ посредствомъ квадратуры.

Два послѣднихъ интегрированія произведемъ надъ уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} dx &= v\, \mathrm{Cos}\,\varphi\, dt \\ dy &= v\, \mathrm{Sin}\,\varphi\, dt \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

предполагая, напримѣръ, что произведеніе vdt выражено чрезъ φ съ помощью уравненія:

$$v\, dt = \rho\, d\varphi,$$

въ которомъ ρ замѣнено найденной уже функціей отъ φ.

Такимъ образомъ при интегрированіи у насъ войдетъ *пять* постоянныхъ произвольныхъ; для опредѣленія ихъ намъ послужитъ, кромѣ положенія и скорости точки въ начальный моментъ, начальное значеніе дуги s траекторіи.

Замѣтимъ, что способъ, который мы примѣнили къ рѣшенію нашей задачи, въ тѣхъ случаяхъ, когда сопротивленіе среды не пропорціонально квадрату скорости, уже не можетъ служить для того, чтобъ привести рѣшеніе задачи о движеніи тяжелой точки къ квадратурамъ; но при сопротивленіи, пропорціональномъ квадрату скорости, этотъ способъ, какъ легко видѣть, приводитъ рѣшеніе задачи о движеніи точки къ квадратурамъ и тогда, когда къ точкѣ, кромѣ силы тяжести, приложена еще сила, направленная по вертикали вверхъ или внизъ, величина которой остается постоянною или выражается какою-либо функціей длины пути, пройденнаго точкой.

§ 3. Частный случай: сопротивленіе среды, разсчитанное на единицу массы при единицѣ скорости, равно $\frac{1}{a+bs}$.

Для примѣра возьмемъ случай, въ которомъ

$$f(s)=\frac{1}{a+bs},$$

гдѣ a и b суть постоянныя.

Функція $a+bs$ для положеній движущейся точки не можетъ имѣть отрицательныхъ значеній; начальное значеніе s положимъ равнымъ нулю, тогда

$$a>0,\qquad b\gtrless 0;$$

если $b<0$, то движеніе точки разсматривается на пути отъ $s=0$ до $s=-\frac{a}{b}$: при $s=-\frac{a}{b}$ движеніе точки прекращается вслѣдствіе того, что или масса точки обращается въ нуль, или сопротивленіе среды, разсчитанное на единицу скорости, становится безконечно большимъ.

Случай: $f(s)=\frac{1}{a+bs}$ представляется, напримѣръ, тогда, когда мы разсматриваемъ движеніе въ воздухѣ брошеннаго наклонно къ горизонту тяжелаго однороднаго шара, который горитъ равномѣрно по всей поверхности такимъ образомъ, что уменьшеніе радіуса пропорціонально пройденному пути, предполагая при этомъ, что со-

противленіе воздуха пропорціонально квадрату скорости и площади большого круга шара.

Въ настоящемъ случаѣ

$$\int f ds = \frac{1}{b} \log (a + bs) + \text{Const}.$$

и мы получаемъ изъ общихъ формулъ:

$$v \operatorname{Cos} \varphi = C (a + bs)^{-\frac{1}{b}} \dots\dots\dots\dots (8_1)$$

$$\rho \operatorname{Cos}^3 \varphi = \frac{1}{g} C^2 (a + bs)^{-\frac{2}{b}} \dots\dots\dots\dots (9_1)$$

затѣмъ, предполагая, что b не равно —2, находимъ:

$$(a + bs)^{\frac{2+b}{b}} = (2 + b) \Phi \dots\dots\dots\dots (10_1)$$

гдѣ Φ обозначаетъ функцію отъ φ, стоящую въ правой части ур. (10):

$$\Phi = \frac{1}{2g} C^2 \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{Cos} \varphi} - \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] + D.$$

Ур. (11), съ помощью уравненій (9_1) и (10_1), даетъ:

$$dt = \pm \frac{1}{g} C \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \varphi} [(2 + b) \Phi]^{-\frac{1}{2+b}} d\varphi \dots (11_1)$$

изъ двухъ знаковъ $\pm$ выбираемъ здѣсь тотъ, при которомъ $\frac{d\varphi}{dt} > 0$.

Ур. (12), съ помощью уравненій (8_1) и (10_1), даютъ:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \pm \frac{1}{g} C^2 \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \varphi} [(2 + b) \Phi]^{-\frac{2}{2+b}} d\varphi \\ dy &= \pm \frac{1}{g} C^2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi} [(2 + b) \Phi]^{-\frac{2}{2+b}} d\varphi \end{aligned}\right\} \dots (12_1)$$

гдѣ долженъ быть взятъ въ правыхъ частяхъ тотъ же знакъ, что и въ ур. (11_1).

При $b = -2$ получимъ формулы для dt, dx и dy, замѣняя въ формулахъ (11_1) и (12_1) выраженіе:

$$[(2+b)\,\Phi]^{-\frac{1}{2+b}}$$

чрезъ

$$e^{-\Phi}.$$

Изъ полученыхъ формулъ можно вывести нѣкоторыя *заключенія* относительно движенія точки.

Случай: $b > 0$.

Точка удаляется въ безконечность; при этомъ уголъ, образуемый ея скоростью съ вертикалью, направленною внизъ, приближается къ нулю, а величина скорости безпредѣльно возрастаетъ; вмѣстѣ съ тѣмъ время также возрастаетъ безпредѣльно; траекторія точки имѣетъ вертикальную асимптоту на конечномъ разстояніи только при $b > 2$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулы (10_1) мы видимъ, что съ возрастаніемъ s функція Φ возрастаетъ безпредѣльно, и, слѣдовательно, уголъ φ приближается къ $\frac{\pi}{2}$.

Далѣе изъ формулъ (8_1) и (10_1) находимъ:

$$v = C\,\frac{1}{\operatorname{Cos}\varphi}\,[(2+b)\,\Phi]^{-\frac{1}{2+b}}\;\ldots\ldots\ldots(13)$$

при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ это выраженіе даетъ $\frac{0}{0}$; напишемъ его въ видѣ:

$$v = C\,(2+b)^{-\frac{1}{2+b}}\left(\frac{\operatorname{Cos}^{-2-b}\varphi}{\Phi}\right)^{\frac{1}{2+b}}$$

и возьмемъ производныя отъ числителя и знаменателя выраженія, стоящаго въ скобкахъ, принимая во вниманіе, что

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{1}{g} C^2 \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 \varphi};$$

получимъ:

$$(C^b g)^{\frac{1}{2+b}} \left(\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}^b\,\varphi}\right)^{\frac{1}{2+b}} \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

слѣдовательно, съ приближеніемъ φ къ $\frac{\pi}{2}$ скорость v безпредѣльно возрастаетъ.

Время движенія t_1 опредѣляется изъ уравненія:

$$t_1 = \frac{1}{g} C (2+b)^{-\frac{1}{2+b}} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \Phi^{-\frac{1}{2+b}} \mathrm{Cos}^{-2} \varphi \, d\varphi \; .. (15)$$

раскрывая неопредѣленность, которую представляетъ подъинтегральная функція при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, находимъ:

$$\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}^{2+2b}\,\varphi}\right)^{\frac{1}{2+b}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

кромѣ множителя, имѣющаго извѣстное конечное значеніе; отсюда видно, что подъинтегральная функція при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получаетъ безконечно большое значеніе и притомъ порядка выше перваго, слѣдовательно, съ приближеніемъ φ къ $\frac{\pi}{2}$ время t безпредѣльно возрастаетъ.

Наконецъ, для опредѣленія значенія $x = x_1$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, полагая, что въ начальномъ положеніи $x = 0$, имѣемъ формулу:

$$x_1 = \frac{1}{g} C (2+b)^{-\frac{2}{2+b}} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \Phi^{-\frac{2}{2+b}} \mathrm{Cos}^{-2} \varphi \, d\varphi;$$

раскрывая здѣсь неопредѣленность подъ знакомъ интеграла при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, получаемъ:

$$\left(\frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}^b\varphi}\right)^{\frac{2}{2+b}},$$

слѣдовательно, подъинтегральная функція при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ обращается въ безконечность порядка, который выражается числомъ $\frac{2b}{2+b}$; при $b < 2$ порядокъ безконечности будетъ менѣе единицы, и, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ съ приближеніемъ φ къ $\frac{\pi}{2}$ разстояніе движущейся точки отъ оси Oy приближается къ нѣкоторому предѣлу.

Мы вывели такимъ образомъ всѣ указанныя выше свойства движенія точки при $b > 0$.

Случай: $b < 0$.

Съ приближеніемъ точки къ крайнему ея положенію: $s = -\frac{a}{b}$ уголъ, образуемый скоростью съ вертикалью, направленною внизъ, уменьшается до нуля при $b > -2$ и только до нѣкотораго предѣла бо́льшаго нуля, при $b < -2$; при этомъ величина скорости въ обоихъ случаяхъ приближается къ нулю и время движенія остается конечнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулы (10_1) слѣдуетъ, что съ приближеніемъ значенія $a + bs$ къ нулю при $0 > b > -2$ функція Φ безпредѣльно возрастаетъ и, слѣдовательно, уголъ φ приближается къ $\frac{\pi}{2}$, тогда какъ при $b < -2$ функція Φ приближается къ нулю, и, слѣдовательно, уголъ φ къ значенію φ_1, которое представляетъ корень уравненія: $\Phi = 0$, удовлетворяющій условію: $\varphi_0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$.

Выраженіе (13) скорости точки въ функціи отъ φ показываетъ, что при $b < -2$, когда $\varphi = \varphi_1$, $v = 0$; если же $0 > b > -2$, тогда это выраженіе при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ представляется въ видѣ $\frac{0}{0}$; но изъ формулы (14), которая получается при раскрытіи неопредѣленности, мы видимъ, что съ приближеніемъ φ къ $\frac{\pi}{2}$ скорость v также приближается къ нулю.

Для опредѣленія времени движенія въ случаѣ $0 > b > -2$ послужитъ формула (15); при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ подъинтегральная функція даетъ $\frac{0}{0}$, но формула (16), которую находимъ, раскрывая неопредѣленность, показываетъ, что при $-1 > b > -2$ подъинтегральная функція остается конечною въ предѣлахъ интегрированія; если же $0 > b > -1$, тогда формула (16) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ обращается въ безконечность порядка ниже перваго, и, слѣдовательно, интегралъ получаетъ также конечное значеніе; въ случаѣ $b < -2$ въ формулѣ (15) верхнимъ предѣломъ интеграла вмѣсто $\frac{\pi}{2}$ будетъ φ_1, и, слѣдовательно, подъинтегральная функція остается конечною въ предѣлахъ интегрированія;— заключаемъ, что при $b < 0$ время движенія t_1 конечно.

§ 4. Скорость измѣняющей массы равна нулю.

Разсмотримъ теперь задачу § 2, измѣнивши въ ней только одно условіе, именно предположимъ, что *скорость измѣняющей массы равна нулю.*

Уравненія движенія въ декартовыхъ координатахъ, если ось Oy направимъ по вертикали внизъ, по раздѣленіи на массу точки, будутъ:

$$x'' = -\frac{k}{m} vx' - \frac{1}{m}\frac{dm}{dt} x'$$

$$y'' = g - \frac{k}{m} vy' - \frac{1}{m}\frac{dm}{dt} y',$$

но

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{ds} v,$$

слѣдовательно, обозначая

$$\frac{k}{m} + \frac{1}{m}\frac{dm}{ds} = F(s),$$

получимъ уравненія движенія въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -F(s)\, vx' \\ y'' &= g - F(s)\, vy' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Ур. (17) имѣютъ тотъ же видъ, что и дифференціальныя уравненія задачи § 2 въ декартовыхъ координатахъ; разница заключается въ томъ, что функція $F(s)$ можетъ получать не только положительныя, но и отрицательныя значенія для положеній движущейся точки, — именно тогда, когда масса точки уменьшается и притомъ $\frac{dm}{ds} < -k$; но легко видѣть, что всѣ формулы, которыя мы вывели въ § 2 при интегрированіи уравненій (6) и (7), имѣютъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда $f(s) < 0$; слѣдовательно, эти же формулы даютъ намъ рѣшеніе и настоящей задачи, если замѣнить въ нихъ $f(s)$ чрезъ $F(s)$.

Возьмемъ частный случай, когда

$$F(s) = \frac{1}{a + bs},$$

гдѣ a и b постоянныя величины.

Пусть напримѣръ, движется въ воздухѣ тяжелый однородный шаръ, брошенный наклонно къ горизонту; при этомъ масса шара измѣняется вслѣдствіе того, что на всей его поверхности происходитъ присоединеніе или удаленіе частицъ такимъ образомъ, что измѣненіе радіуса пропорціонально длинѣ пройденнаго пути, а скорость центра инерціи измѣняющихъ частицъ равна нулю; сопротивленіе воздуха предполагается пропорціональнымъ квадрату скорости и площади большого круга шара.

Обозначимъ чрезъ r_0 радіусъ шара въ начальный моментъ, положимъ $s_0 = 0$, тогда радіусъ шара $r = r_0 + \varepsilon s$, гдѣ постоянная величина $\varepsilon \gtrless 0$.

Пусть сопротивленіе, разсчитанное на единицу площади большого круга при скорости, равной единицѣ, будетъ k_1; плотность шара σ, тогда

$$\frac{k}{m} + \frac{1}{m}\frac{dm}{ds} = \frac{\mu}{r_0 + \varepsilon s},$$

гдѣ

$$\mu = \frac{3k_1}{4\sigma} + 3\varepsilon.$$

Можетъ быть $\mu = 0$, именно въ томъ случаѣ, если радіусъ шара

убываетъ и притомъ такъ, что $\varepsilon = -\frac{k_1}{4\sigma}$; ур. (17) показываютъ, что тогда центръ шара движется такъ же, какъ движется въ пустотѣ тяжелая точка постоянной массы.

При $\mu \gtrless 0$ мы получаемъ случай, когда

$$F(s) = \frac{1}{a+bs},$$

гдѣ $a = \frac{r_0}{\mu}$ и $b = \frac{\varepsilon}{\mu}$.

Если радіусъ шара возрастаетъ или если онъ убываетъ, но такъ, что $\varepsilon > -\frac{k_1}{4\sigma}$, будетъ $a > 0$ и, слѣдовательно, мы имѣемъ случай, который уже разсмотрѣнъ въ предыдущемъ параграфѣ.

Намъ остается разсмотрѣть тотъ случай, когда радіусъ шара убываетъ, но такъ, что $\varepsilon < -\frac{k_1}{4\sigma}$ и, слѣдовательно, $a < 0$; при этомъ будетъ $b > 0$.

Всѣ формулы отъ (8_1) до (12_1) имѣютъ мѣсто и при $a < 0$; разница заключается только въ томъ, что въ нѣкоторыя изъ нихъ будутъ теперь входить мнимыя величины.

Мы получимъ формулы, содержащія только вещественныя величины, если въ формулахъ (8_1) — (12_1) замѣнимъ $a+bs$ чрезъ $-(a+bs)$ и, кромѣ того, въ формулахъ (10_1), (11_1) и (12_1) множитель $2+b$ чрезъ $-(2+b)$.

Движеніе разсматривается на пути отъ $s=0$ до $s = -\frac{a}{b} = -\frac{r_0}{\varepsilon}$, слѣдовательно, до того положенія, въ которомъ радіусъ шара обращается въ нуль.

Въ этомъ положеніи $\varphi = \varphi_1$, при чемъ φ_1 есть корень уравненія: $\Phi = 0$, удовлетворяющій условію: $\varphi_0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$; скорость точки при $\varphi = \varphi_1$ безконечно велика.

Замѣтимъ, что формулы, представляющія рѣшеніе задачи настоящаго параграфа, при $k=0$ даютъ рѣшеніе задачи о движеніи *въ пустотѣ* тяжелой точки, масса которой есть функція длины пройденнаго пути въ предположеніи, что скорость измѣняющей массы равна нулю; въ случаѣ шара, радіусъ котораго: $r = r_0 + \varepsilon s$, мы

имѣемъ здѣсь $a>0$, когда радіусъ возрастаетъ, и $a<0$, когда радіусъ убываетъ.

§ 5. Скорости измѣняющей массы и точки направлены по одной прямой.

Уравненія (17) получаются и въ томъ случаѣ, когда въ задачѣ § 2 будетъ дано, что *скорость измѣняющей массы и скорость точки направлены по одной прямой и притомъ отношеніе скоростей есть нѣкоторая функція длины пройденнаго точкою пути.*

Пусть λ будетъ отношеніе скорости измѣняющей массы къ скорости точки, взятое со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, направлены ли скорости въ одну сторону или въ стороны противоположныя; λ есть данная функція отъ s, въ частности, величина постоянная.

Уравненія движенія точки могутъ быть представлены въ видѣ:

$$mx'' = \quad -\left[k-(\lambda-1)\frac{dm}{ds}\right]vx'$$

$$my'' = mg-\left[k-(\lambda-1)\frac{dm}{ds}\right]vy';$$

полагая въ нихъ

$$\frac{k}{m}-\frac{\lambda-1}{m}\frac{dm}{ds}=F(s),$$

получимъ ур. (17) и, слѣдовательно, формулы, выведенныя въ § 2, даютъ рѣшеніе задачи въ указанномъ здѣсь болѣе общемъ случаѣ.

Тѣ случаи, въ которыхъ или нѣтъ прибавочной силы, или скорость измѣняющей массы равна нулю, можно разсматривать какъ частные по отношенію къ случаю, когда проекціи прибавочной силы выражаются по формуламъ:

$$\frac{dm}{dt}(\lambda-1)\,x',\quad \frac{dm}{dt}(\lambda-1)\,y',\quad \frac{dm}{dt}(\lambda-1)\,z',$$

гдѣ λ величина, вообще говоря, перемѣнная, конечная и непрерывная во все время движенія: они получаются отсюда, полагая $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$.

Въ этомъ случаѣ могутъ быть указаны нѣкоторыя свойства движенія тяжелой точки и тогда, когда мы возьмемъ задачу въ самомъ общемъ видѣ, не дѣлая никакихъ предположеній относительно вида функцій, выражающихъ массу точки и сопротивленіе среды, кромѣ того, что масса точки остается положительной величиной, а сопротивленіе среды направлено противоположно скорости.

Въ самомъ дѣлѣ, направленіе силъ, приложенныхъ къ точкѣ, указываетъ на то, что траекторія точки заключается въ вертикальной плоскости и обращена своей выпуклостью вверхъ; затѣмъ, если

$$\frac{dm}{dt}(\lambda - 1) < 0,$$

то для разсматриваемаго движенія, какъ видно изъ ур. (1), имѣютъ мѣсто тѣ извѣстныя свойства, которыми обладаетъ движеніе тяжелой точки постоянной массы независимо отъ того, какъ выражается сопротивленіе среды, а именно: до тѣхъ поръ, пока точка не достигнетъ наивысшаго положенія, уменьшается и скорость точки, и радіусъ кривизны траекторіи; далѣе, если точка перейдетъ чрезъ наивысшее положеніе, продолжается уменьшеніе скорости до нѣкотораго положенія, и радіусъ кривизны также уменьшается нѣкоторое время; затѣмъ, если мы возьмемъ два положенія точки, лежащія на одномъ уровнѣ,—одно на восходящей части траекторіи, другое на нисходящей, то оказывается, что для второго положенія нижеслѣдующія величины будутъ меньше, чѣмъ для перваго: скорость точки, горизонтальная проекція скорости, острый уголъ, образуемый направленіемъ скорости съ вертикальной линіей, и длина дуги траекторіи, отсчитываемая отъ наивысшаго положенія.

ГЛАВА VII.

ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ ПРИ ДѢЙСТВІИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ.

§ 1. Уравненія движенія и слѣдствія ихъ.

Обозначимъ чрезъ F величину центральной силы, взятую со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, будетъ ли сила отталкивательной или притягательной; чрезъ R—величину сопротивленія среды; чрезъ α, β, γ—проекціи на координатныя оси скорости измѣняющей массы; тогда, принимая центръ силы за начало координатъ, мы получимъ уравненія движенія точки перемѣнной массы въ видѣ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F \frac{x}{r} + \frac{dm}{dt} (\alpha - x') - R \frac{x'}{v}$$

. . . .

гдѣ r радіусъ-векторъ точки.

Укажемъ нѣкоторыя слѣдствія этихъ уравненій прежде всего для того случая, когда при измѣненіи массы *ударовъ не происходитъ:*

$$\alpha = x', \quad \beta = y', \quad \gamma = z'.$$

1. Измѣненіе массы не вліяетъ на движеніе, если сила пропорціональна массѣ точки и сопротивленіе среды не принимается во вниманіе.

2. Задача о движеніи точки въ пустотѣ рѣшается въ квадратурахъ, если масса точки и величина силы выражаются какими-либо функціями разстоянія точки отъ центра силы.

3. Задача о движеніи точки перемѣнной массы въ сопротивляющейся средѣ приводится къ задачѣ о движеніи точки постоянной массы въ средѣ, плотность которой измѣняется по извѣстному закону. Въ частномъ случаѣ, когда сила пропорціональна разстоянію и сопротивленіе среды пропорціонально скорости точки, уравненія движенія точки будутъ уравненіями Риккати, если, напримѣръ, масса и поверхность тѣла, отъ котораго мы переходимъ къ точкѣ, измѣняются въ зависимости только отъ времени.

Изъ тѣхъ случаевъ, въ которыхъ при измѣненіи массы *происходятъ удары*, мы разсмотримъ нижеслѣдующіе четыре случая, предполагая при этомъ, что сопротивленіе среды не принимается во вниманіе и, слѣдовательно, въ уравненіяхъ движенія $R = 0$.

1-й случай. Скорость измѣняющей массы *равна нулю:*

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Уравненія движенія допускаютъ три интеграла площадей, слѣдовательно, точка движется въ плоскости, заключающей центръ силы, и секторіальная скорость точки въ этой плоскости обратно пропорціональна ея массѣ:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{m},$$

гдѣ c величина постоянная.

Если масса точки и величина силы зависятъ только отъ разстоянія между точкою и центромъ силы, существуетъ еще интегралъ:

$$\frac{1}{2}(mv)^2 = \int m F\, dr + \text{Const}.$$

и, слѣдовательно, задача рѣшается въ квадратурахъ.

Замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ, вводя вмѣсто t перемѣнную τ посредствомъ уравненія:

$$d\tau = \frac{1}{m}\, dt,$$

какъ указано въ § 9, гл. II, мы получимъ уравненія движенія въ видѣ:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = mF\,\frac{x}{r}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

и такимъ образомъ приведемъ нашу задачу къ задачѣ о движеніи точки постоянной массы при дѣйствіи центральной силы, величина которой выражается функціей разстоянія.

2-й случай. Скорость измѣняющей массы направлена *по одной прямой со скоростью точки:*

$$\frac{\alpha}{x'} = \frac{\beta}{y'} = \frac{\gamma}{z'} = \lambda.$$

Уравненія движенія допускаютъ два интеграла:

$$yz' - zy' = C_1\,(xy' - yx')$$

$$zx' - xz' = C_2\,(xy' - yx'),$$

и, слѣдовательно, движеніе точки происходитъ въ плоскости, заключающей центръ силы.

Если отношеніе λ величина постоянная или функція отъ m, то для движенія точки въ этой плоскости имѣемъ интегралъ:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{m}\, e^{\int \lambda \frac{dm}{m}}.$$

Если при этомъ масса точки и величина силы выражаются нѣкоторыми функціями разстоянія, то задача рѣшается въ квадратурахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$d\tau = \frac{1}{m} e^{\int \lambda \frac{dm}{m}} dt,$$

мы получаемъ уравненія движенія въ видѣ:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = me^{-2\int \lambda \frac{dm}{m}} F \frac{x}{r}$$

. . . .

интегралы которыхъ выражаются въ квадратурахъ.

Пусть, напримѣръ, разсматривается движеніе кометы при приближеніи ея къ перигелію, допуская, что масса кометы уменьшается и можетъ быть выражена нѣкоторой функціей разстоянія кометы отъ солнца; тогда уравненія движенія интегрируются въ квадратурахъ, если предположить, что скорость центра инерціи отдѣляющихся частицъ или равна нулю или направлена по одной прямой со скоростью кометы, причемъ отношеніе этихъ скоростей есть или величина постоянная или нѣкоторая функція разстоянія между кометою и солнцемъ.

3-й случай. Скорость измѣняющей массы направлена *по прямой, соединяющей точку съ центромъ силы:*

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{z}.$$

Уравненія движенія допускаютъ три интеграла площадей, слѣдовательно, точка движется въ плоскости, заключающей центръ силы, и секторіальная скорость точки въ этой плоскости обратно пропорціональна ея массѣ.

4-й случай. *Масса точки и проекціи геометрической разности w между скоростями измѣняющей массы и точки выражаются данными функціями времени:*

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}(\alpha - x') = f_1(t), \quad \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}(\beta - y') = f_2(t), \quad \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}(\gamma - z') = f_3(t).$$

Предполагая, что центральная сила пропорціональна массѣ точки и нѣкоторой функціи разстоянія:

$$F = m\,\varphi(r),$$

мы получаемъ слѣдующія уравненія движенія точки:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(r)\frac{x}{r} + f_1(t)$$

. . . .

Пусть $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ будутъ функціи, вторыя производныя которыхъ соотвѣтственно равны $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$; тогда, полагая въ полученныхъ уравненіяхъ:

$$x = \xi + F_1(t), \quad y = \eta + F_2(t), \quad z = \zeta + F_3(t),$$

мы придемъ къ задачѣ о движеніи въ пустотѣ точки постоянной массы при дѣйствіи центральной силы, центръ которой движется даннымъ образомъ.

Если геометрическая разность w сохраняетъ постоянное направленіе, то, взявши ось Ox параллельно w, имѣемъ:

$$f_1(t) = \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}w, \; f_2(t) = 0, \; f_3(t) = 0;$$

пусть при этомъ центральная сила дѣйствуетъ по закону Ньютона; тогда, если масса точки и геометрическая разность w удовлетворяютъ условію:

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}w = a,$$

гдѣ a величина постоянная, задача о движеніи точки рѣшается въ квадратурахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія движенія въ этомъ случаѣ имѣютъ тотъ же видъ, какъ въ задачѣ о движеніи тяжелой точки постоянной массы, притягиваемой неподвижнымъ центромъ по закону Ньютона;

послѣдняя же задача уже рѣшена, — она была предметомъ изслѣдованій Ch. Cellérier и A. de Saint-Germain.

Въ посмертномъ мемуарѣ Ch. Cellérier: *„Note sur une question de mécanique“* (Bulletin des Sciences mathématiques, t. XV, pp. 146—162, 1891), кромѣ интеграла площадей въ горизонтальной плоскости и интеграла живой силы, получается третій интегралъ тѣмъ же способомъ, какимъ пользовался Эйлеръ при рѣшеніи задачи о движеніи точки, притягиваемой къ двумъ неподвижнымъ центрамъ по закону Ньютона; въ статьѣ A. de Saint-Germain: *„Mouvement d'un point pesant attiré par un point fixe suivant la loi de Newton“* (Nouvelles annales de Mathématiques, III série, t. XI, pp. 89—97, 1892) примѣняется методъ Гамильтона-Якоби и рѣшеніе задачи приводится къ квадратурамъ.

Такимъ образомъ задача о движеніи въ пустотѣ точки, притягиваемой неподвижнымъ центромъ по закону Ньютона, рѣшается въ квадратурахъ, если, напримѣръ, масса точки выражается показательною функціей: $m = m_0 e^{\varepsilon t}$, а геометрическая разность w остается постоянною по величинѣ и направленію, или, если масса точки измѣняется пропорціонально времени, а геометрическая разность w пропорціональна массѣ и постоянна по направленію.

Далѣе мы приведемъ примѣры, относящіеся къ тремъ предыдущимъ случаямъ, именно такіе, въ которыхъ масса точки выражается функціей времени и уравненія движенія при дѣйствіи центральной силы, пропорціональной массѣ и нѣкоторой степени разстоянія, интегрируются въ квадратурахъ.

§ 2. Введеніе въ уравненія движенія точки нѣкоторыхъ новыхъ перемѣнныхъ.

Когда масса точки выражается данною функціей времени, а также и въ другихъ случаяхъ, въ уравненіи движенія точки полезно иногда ввести новыя перемѣнныя какъ вмѣсто декартовыхъ координатъ точки, такъ и вмѣсто перемѣнной, обозначающей

время; съ помощью такого преобразованія перемѣнныхъ мы можемъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ данную задачу привести къ задачѣ извѣстной, служившей уже предметомъ изслѣдованій.

Пусть новыя перемѣнныя будутъ ξ, η, ζ, τ, и мы разсмотримъ тотъ случай, когда эти перемѣнныя связаны со старыми: x, y, z, t посредствомъ уравненій:

$$\xi = xf(t), \quad \eta = yf(t), \quad \zeta = zf(t), \quad d\tau = \varphi(t)dt \ldots .(1)$$

Изъ ур. (1) находимъ:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{\varphi}\left(\frac{dx}{dt}f + xf'\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{f}{\varphi^2} + \frac{d\xi}{d\tau}\left(\frac{2f'}{f\varphi} - \frac{\varphi'}{\varphi^2}\right) + \frac{\xi}{f^2\varphi^2}(ff'' - 2f'^2) \ldots (3)$$

гдѣ

$$f' = \frac{df}{dt}, \quad f'' = \frac{d^2f}{dt^2}, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dt},$$

и подобныя же выраженія для производныхъ отъ η и ζ по τ.

Изъ данныхъ дифференціальныхъ уравненій движенія точки, съ помощью формулъ (1) и (2), мы выразимъ вторыя производныя по t отъ x, y, z чрезъ новыя перемѣнныя и ихъ первыя производныя по τ, найденныя выраженія подставимъ въ ур. (3) и въ два другія подобныя ему уравненія, — и мы получимъ дифференціальныя уравненія движенія точки въ новыхъ перемѣнныхъ.

Выбирая соотвѣтствующимъ образомъ функціи $f(t)$ и $\varphi(t)$, мы можемъ или только упростить эти уравненія или же привести ихъ къ уравненіямъ, уже изслѣдованнымъ.

§ 3. Примѣръ, въ которомъ скорость измѣняющей массы равна нулю и $m = \frac{m_0}{1 - \alpha t}$.

Для примѣра возьмемъ тотъ случай, когда разсматривается движеніе въ пустотѣ тѣла, элементы котораго притягиваются по закону

Ньютона къ неподвижному центру, въ предположеніи, что масса тѣла увеличивается съ теченіемъ времени по закону:

$$m = \frac{m_0}{1 - \alpha t},$$

гдѣ m_0 и α постоянныя положительныя величины, — вслѣдствіе присоединенія частицъ, центръ инерціи которыхъ имѣетъ скорость равную нулю, причемъ тѣло сохраняетъ форму шара.

Этотъ случай приводитъ насъ къ рѣшенію слѣдующей задачи:

Опредѣлить движеніе въ пустотѣ точки, притягиваемой къ началу координатъ по закону Ньютона, предполагая, что масса ея возрастаетъ по закону:

$$m = \frac{m_0}{1 - \alpha t},$$

гдѣ m_0 и α постоянныя положительныя величины, и притомъ скорость прибавочной массы равна нулю.

Уравненія движенія представляются въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -k\frac{x}{r^3} - \frac{\alpha}{1-\alpha t}x' \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k\frac{y}{r^3} - \frac{\alpha}{1-\alpha t}y' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

гдѣ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Вводимъ новыя перемѣнныя, полагая:

$$\xi = \frac{x}{(1-\alpha t)^2},\quad \eta = \frac{y}{(1-\alpha t)^2},\quad d\tau = \frac{dt}{(1-\alpha t)^3} \ldots\ldots (5)$$

Преобразованныя уравненія (4) будутъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= -k\frac{\xi}{\rho^3} \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= -k\frac{\eta}{\rho^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

гдѣ

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Интегралы уравненій (6) извѣстны, слѣдовательно, и уравненія (4) можемъ теперь считать также проинтегрированными.

Легко написать два интеграла ур. (4): одинъ изъ нихъ соотвѣтствуетъ интегралу площадей и получается непосредственно изъ ур. (4):

$$xy' - yx' = C(1 - \alpha t) \qquad (7)$$

гдѣ C постоянная произвольная; другой соотвѣтствуетъ интегралу живой силы; онъ просто выводится изъ интеграла ур. (6):

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 = \frac{2k}{\rho} + 2h,$$

гдѣ h постоянная произвольная, — подставляя вмѣсто $\frac{d\xi}{d\tau}$ и $\frac{d\eta}{d\tau}$ ихъ выраженія, которыя получаются съ помощью формулъ (2) и (5):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{dx}{dt}(1 - \alpha t) + 2\alpha x \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \frac{dy}{dt}(1 - \alpha t) + 2\alpha y \end{aligned}\right\} \qquad (2_1)$$

находимъ:

$$(x'^2 + y'^2)(1 - \alpha t)^2 + 4\alpha(1 - \alpha t)(xx' + yy') +$$
$$+ 4\alpha^2 r^2 - \frac{2k(1 - \alpha t)}{r} = 2h \qquad (8)$$

Для того, чтобы получить нѣкоторое представленіе о движеніи точки $M(x, y)$, мы можемъ разсматривать ξ и η, какъ координаты точки $\mathcal{M}$, которая движется во время τ.

Интегрируя послѣднее изъ ур. (5), выражающее зависимость между перемѣнными t и τ, находимъ:

$$\tau = \frac{1}{2\alpha(1-\alpha t)^2} + \Gamma.$$

Для опредѣленія постоянной Γ положимъ, напримѣръ, что моменту $t=0$ соотвѣтствуетъ $\tau=0$; тогда

$$\Gamma = -\frac{1}{2\alpha},$$

и мы имѣемъ:

$$1+2\alpha\tau = \frac{1}{(1-\alpha t)^2},$$

откуда

$$t = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\sqrt{1+2\alpha\tau}}.$$

Движеніе точки M мы разсматриваемъ въ теченіе промежутка времени, заключающагося въ предѣлахъ: $t=-\infty$ и $t=\frac{1}{\alpha}$; соотвѣтствующія значенія τ лежатъ между $\tau=-\frac{1}{2\alpha}$ и $\tau=+\infty$, причемъ τ возрастаетъ вмѣстѣ съ возрастаніемъ t.

Въ моментъ $t=0$ точки M и $\mathcal{M}$ совпадаютъ.

Изъ формулъ (5) слѣдуетъ, что точка M въ моментъ t и точка $\mathcal{M}$ въ соотвѣтствующій моментъ τ находятся на одной прямой, проведенной изъ притягивающаго центра O; такъ какъ при возрастаніи t возрастаетъ и τ, то эта прямая при движеніи точекъ M и $\mathcal{M}$ вращается вокругъ центра O, причемъ отношеніе разстояній OM и $O\mathcal{M}$

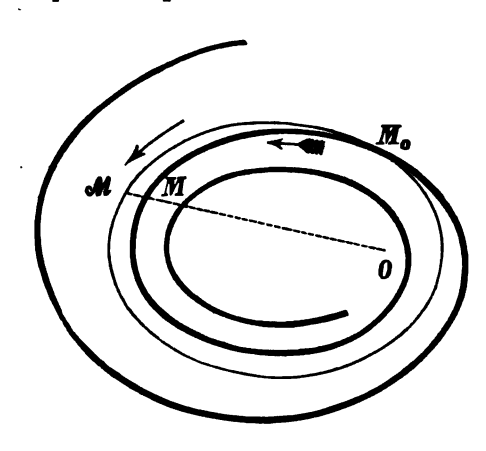
$$\frac{r}{\rho} = (1-\alpha t)^2$$

убываетъ съ теченіемъ времени.

Точка $\mathcal{M}$ описываетъ эллипсъ, параболу или гиперболу, смотря по тому, какое значеніе — отрицательное, нулевое или положительное — имѣетъ постоянная величина h, которую мы опредѣляемъ съ помощью ур. (8):

$$h = \frac{1}{2}v_0^2 + 2\alpha r_0 v_0 \operatorname{Cos}(r_0 v_0) + 2\alpha^2 r_0^2 - \frac{k}{r_0}.$$

I. Траекторія точки $\mathscr{M}$ эллипсъ.



Черт. 3.

Точка M описываетъ вокругъ точки O дугу кривой, имѣющей видъ спирали, постепенно приближаясь къ этой точкѣ (черт. 3).

Возьмемъ какой-нибудь опредѣленный радіусъ векторъ, напримѣръ, OM_0, причемъ M_0 обозначаетъ положеніе точки M въ моментъ $t=0$; время, которое точка M употребляетъ для того, чтобы, выйдя изъ нѣкотораго положенія на линіи OM_0, снова прійти на эту линію, будетъ продолжительность одного полнаго оборота точки M вокругъ точки O.

Обозначимъ чрезъ T продолжительность одного оборота точки $\mathscr{M}$; тогда продолжительность перваго оборота точки M, слѣдующаго за моментомъ $t=0$, будетъ равна:

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha\sqrt{1+2\alpha T}},$$

продолжительность второго оборота:

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{1+2\alpha T}}-\frac{1}{\alpha\sqrt{1+4\alpha T}},$$

вообще продолжительность n-аго оборота:

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{1+n\alpha T}}-\frac{1}{\alpha\sqrt{1+(n+2)\alpha T}}.$$

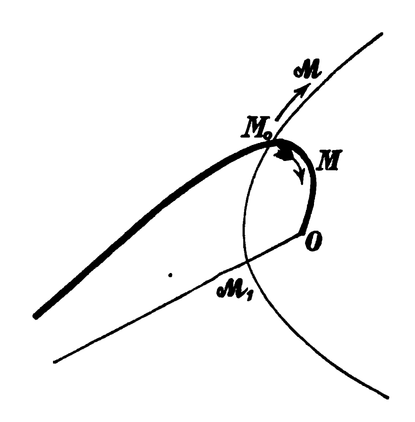
Отсюда нетрудно видѣть, что продолжительность одного полнаго оборота точки M съ теченіемъ времени уменьшается.

Пусть r_n будетъ длина радіуса вектора точки M послѣ n оборотовъ, тогда

$$r_n = \frac{1}{1+2n\alpha T} r_0;$$

легко убѣдиться, что длина, на которую уменьшается радіусъ векторъ точки M за время одного оборота, также уменьшается съ теченіемъ времени.

II. Траекторія точки $\mathcal{M}$ парабола.



Черт. 4.

Обозначимъ чрезъ $\mathcal{M}_1$ (черт. 4) положеніе точки $\mathcal{M}$ въ моментъ

$$\tau = -\frac{1}{2\alpha};$$

тогда траекторія точки M будетъ кривая, которая встрѣчаетъ прямую $O\mathcal{M}_1$ на безконечности и затѣмъ, оставаясь по одну сторону этой прямой, пересѣкаетъ параболу въ точкѣ M_0; далѣе кривая приходитъ въ точку O, и точка M по мѣрѣ того, какъ $\mathcal{M}$ удаляется въ безконечность, приближается къ совпаденію съ точкою O въ моментъ

$$t = \frac{1}{\alpha}.$$

Такое заключеніе слѣдуетъ изъ того, что

$$r = \frac{\rho}{1+2\alpha\tau},$$

а въ случаѣ параболическаго движенія точки $\mathcal{M}$ отношеніе $\frac{\rho}{\tau}$ при возрастаніи τ до безконечности стремится къ нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\rho = \frac{p}{1 + \operatorname{Cos}\theta}$$

уравненіе параболы, то

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2} = a(\tau + b),$$

гдѣ a и b суть постоянныя.

Обозначимъ

$$\frac{3}{2}a(\tau + b) = \tau_1,$$

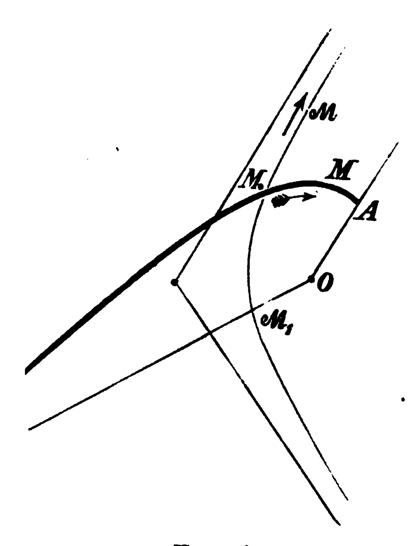
тогда

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{p}{2\tau} + \frac{p}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{\tau_1}{\tau^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{\frac{\tau_1^2}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^3}}} + \sqrt[3]{\frac{\tau_1}{\tau^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{\frac{\tau_1^2}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^3}}}\right]^2,$$

и, слѣдовательно,

$$\left(\frac{\rho}{\tau}\right)_{\tau=\infty} = 0.$$

III. Траекторія точки $\mathcal{M}$ гипербола.



Черт. 5.

Въ этомъ случаѣ такъ же, какъ и въ предыдущемъ, траекторія

точки M встрѣчаетъ на безконечности прямую $O\mathcal{M}_1$ (черт. 5), гдѣ $\mathcal{M}_1$ положеніе точки $\mathcal{M}$ при $\tau = -\frac{1}{2\alpha}$; затѣмъ, оставаясь по одну сторону $O\mathcal{M}_1$, пересѣкаетъ гиперболу въ точкѣ M_0, но далѣе она приходитъ не въ точку O, а въ точку A, радіусъ векторъ которой параллеленъ ассимптотѣ и равенъ $\frac{\sqrt{2h}}{2\alpha}$; по мѣрѣ удаленія точки $\mathcal{M}$ въ безконечность, точка M приближается къ совпаденію съ точкою A въ моментъ $t = \frac{1}{\alpha}$; — въ этомъ нетрудно убѣдиться.

Изъ ур. (2_1) находимъ:

$$\frac{d\xi}{d\tau}\frac{dy}{dt} - \frac{d\eta}{d\tau}\frac{dx}{dt} = 2\alpha\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right);$$

обозначимъ чрезъ u скорость точки $\mathcal{M}$ въ моментъ τ и чрезъ v скорость точки M въ соотвѣтствующій моментъ t, тогда полученное уравненіе можемъ написать въ видѣ:

$$uv \operatorname{Sin}(uv) = 2\alpha rv \operatorname{Sin}(rv),$$

и, слѣдовательно,

$$u \operatorname{Sin}(uv) = 2\alpha r \operatorname{Sin}(rv) \qquad (9)$$

При возрастаніи τ до безконечности направленіе какъ скорости точки $\mathcal{M}$, такъ и радіуса вектора точки M, приближается къ параллельности съ направленіемъ ассимптоты гиперболы; слѣдовательно, разность между $\operatorname{Sin}(uv)$ и $\operatorname{Sin}(rv)$ стремится къ нулю, въ то же время величина u стремится къ $\sqrt{2h}$; поэтому изъ ур. (9) мы заключаемъ, что при приближеніи τ къ безконечности, слѣдовательно, t къ $\frac{1}{\alpha}$ величина r стремится къ $\frac{\sqrt{2h}}{2\alpha}$.

§ 4. Задача § 3 при $\alpha < 0$.

Полагая въ формулахъ, которыя получаются при рѣшеніи предыдущей задачи,

$$\alpha < 0,$$

мы получимъ формулы, соотвѣтствующія тому случаю движенія въ пустотѣ точки, притягиваемой по закону Ньютона, когда масса точки *убываетъ* по закону:

$$m = \frac{m_0}{1-\alpha t}$$

въ предположеніи, что скорость измѣняющей массы равна нулю; при этомъ промежутокъ времени, въ теченіе котораго движеніе разсматривается, заключается въ предѣлахъ: $t = \frac{1}{\alpha}$ и $t = +\infty$.

При возрастаніи t отъ $\frac{1}{\alpha}$ до ∞, τ возрастаетъ отъ $-\infty$ до $-\frac{1}{2\alpha}$.

Укажемъ нѣкоторыя свойства движенія точки въ настоящемъ случаѣ.

Точка M, движеніе которой мы разсматриваемъ, въ моментъ t и точка $\mathcal{M}$ въ соотвѣтствующій моментъ τ находятся на одной прямой, вращающейся вокругъ притягивающаго центра 0; отношеніе разстояній OM и $O\mathcal{M}$ съ теченіемъ времени возрастаетъ.

Если траекторія точки $\mathcal{M}$ эллипсъ, то точка M описываетъ дугу кривой, которая имѣетъ видъ спирали вокругъ точки O, постепенно удаляясь отъ этой точки; продолжительность одного полнаго оборота точки M возрастаетъ съ теченіемъ времени, возрастаетъ также и приращеніе радіуса вектора точки M за время полнаго оборота.

Траекторія точки M имѣетъ видъ дуги кривой, изображенной на чертежѣ 3-мъ, 4-мъ или 5-мъ, смотря по тому, какое коническое сѣченіе описываетъ точка $\mathcal{M}$, если только движеніе точекъ $\mathcal{M}$ и M происходитъ по направленіямъ противоположнымъ тѣмъ, которыя на чертежахъ указаны стрѣлками.

§ 5. Случай, въ которомъ задача о движеніи точки перемѣнной массы при $F = kmr^n$ приводится къ задачѣ о движеніи точки постоянной массы при дѣйствіи той же силы.

Возьмемъ случай болѣе общій, когда на точку перемѣнной массы дѣйствуетъ центральная сила, пропорціональная массѣ точки и n-ой

степени разстоянія, причемъ скорость измѣняющей массы предполагается равною нулю; найдемъ, при какомъ законѣ измѣненія массы въ зависимости отъ времени задача о движеніи этой точки въ пустотѣ посредствомъ вышеуказаннаго преобразованія (1) приводится къ задачѣ о движеніи въ пустотѣ точки постоянной массы при дѣйствіи центральной силы, также пропорціональной массѣ точки и n-ой степени разстоянія.

Дифференціальныя уравненія движенія точки представляются въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= kxr^{n-1} - \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}x' \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= kyr^{n-1} - \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}y' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Введемъ въ эти уравненія перемѣнныя: ξ, η, τ съ помощью формулъ (1), (2) и (3); мы получимъ:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = k\frac{f^{1-n}}{\varphi^2}\xi\rho^{n-1} - \frac{d\xi}{d\tau}\frac{1}{\varphi}\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} + \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{2f'}{f}\right) +$$
$$+ \frac{\xi}{f^2\varphi^2}\left(ff'\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} + ff'' - 2f'^2\right) \ldots\ldots\ldots(11)$$

и второе уравненіе, которое отличается отъ ур. (11) только тѣмъ, что буква ξ замѣнена буквой η.

Опредѣлимъ функціи f, φ и m такъ, чтобы удовлетворялись слѣдующія три уравненія:

$$\frac{f^{1-n}}{\varphi^2} = \text{Const.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} + \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{2f'}{f} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

$$ff'\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} + ff'' - 2f'^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

Пусть n имѣетъ какое-либо положительное или отрицательное значеніе, исключая $n = 1$ и $n = -1$.

Дифференцируя ур. (12), находимъ:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1-n}{2} \frac{f'}{f};$$

тогда ур. (13) можемъ написать въ видѣ:

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = \frac{n+3}{2} \frac{f'}{f},$$

и, слѣдовательно,

$$m = af^{\frac{n+3}{2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

гдѣ a постоянная произвольная.

Для опредѣленія f послужитъ ур. (14), которое представится въ видѣ:

$$ff'' = \frac{1-n}{2} f'^2;$$

отсюда

$$f = (b + ct)^{\frac{2}{n+1}},$$

гдѣ b и c постоянныя произвольныя, и, слѣдовательно,

$$m = a\,(b + ct)^{\frac{n+3}{n+1}}.$$

Обозначая чрезъ m_0 массу точки при $t = 0$, находимъ искомый законъ измѣненія массы:

$$m = m_0\,(1 + \alpha t)^{\frac{n+3}{n+1}},$$

гдѣ $\alpha = \frac{c}{b}$ какая угодно постоянная величина.

Полагая въ формулахъ (1)

$$f = (1 + \alpha t)^{\frac{2}{n+1}}, \quad \varphi = (1 + \alpha t)^{\frac{1-n}{1+n}},$$

получимъ соотвѣтствующія этому случаю формулы преобразованія, съ помощью которыхъ ур. (10) приводятся къ уравненіямъ:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = k\xi\rho^{n-1}$$

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = k\eta\rho^{n-1}.$$

Если центральная сила дѣйствуетъ по закону Ньютона, то $n = -2$, слѣдовательно,

$$m = \frac{m_0}{1+\alpha t}$$

и мы приходимъ къ тому случаю, который выше разсмотрѣнъ въ § 4.

При $n = 1$, когда сила пропорціональна разстоянію, изъ ур. (12), (13), (14) мы найдемъ:

$$m = m_0 (1 + \alpha t)^2$$

$$f = 1 + \alpha t, \quad \varphi = 1.$$

При $n = -1$ тѣ же уравненія намъ даютъ:

$$m = m_0 \, e^{\alpha t}$$

$$f = \varphi = e^{\alpha t}.$$

§ 6. Случай, когда въ соотвѣтствующей задачѣ о движеніи точки постоянной массы къ заданной силѣ присоединяется сила пропорціональная разстоянію.

Преобразованныя уравненія (11) движенія точки интегрируются извѣстнымъ образомъ и тогда, когда имѣютъ мѣсто уравненія (12) и (13) и притомъ коэффиціенты при ξ и η въ первой степени суть

величины постоянныя; въ этомъ случаѣ вмѣсто ур. (14) получаемъ уравненіе:

$$ff' \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} + ff'' - 2f'^2 = Af^2 \varphi^2 \ldots\ldots (14_1)$$

гдѣ A величина постоянная.

Съ помощью уравненій (12) и (13) ур. (14_1) приводится къ виду:

$$ff'' + \frac{n-1}{2} f'^2 = Bf^{3-n} \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

гдѣ B величина постоянная.

При $n = 1$ изъ ур. (16) находимъ:

$$f = A_1 e^{\alpha t} + B_1 e^{-\alpha t}$$

или

$$f = A_1 \operatorname{Sin} \alpha t + B_1 \operatorname{Cos} \alpha t,$$

гдѣ α величина постоянная, и формула (15) даетъ

$$m = af^2.$$

При $n \gtrless 1$ первый интегралъ ур. (16) будетъ

$$f'^2 = Bf^{3-n} + Cf^{1-n},$$

и, слѣдовательно, f опредѣляется изъ уравненія:

$$\int \frac{df}{\sqrt{Bf^{3-n} + Cf^{1-n}}} = t + \text{Const.} \ldots\ldots\ldots (17)$$

а затѣмъ найдемъ и массу точки m по формулѣ (15).

Въ этомъ случаѣ мы приходимъ къ задачѣ о движеніи точки постоянной массы, къ которой, кромѣ заданной центральной силы, пропорціональной n-ой степени разстоянія приложена еще сила, исходящая изъ того же центра и пропорціональная разстоянію.

Законъ измѣненія массы при $n \gtrless 1$ выражается просто, если положить $C = 0$ и $B = b^2$; тогда изъ ур. (17) находимъ

$$f = \left(a + \frac{n-1}{2} bt\right)^{\frac{2}{n-1}}$$

и, слѣдовательно,

$$m = m_0 (1 + \alpha t)^{\frac{n+3}{n-1}}.$$

Когда заданная сила дѣйствуетъ по закону Ньютона, эта формула даетъ:

$$m = m_0 (1 + \alpha t)^{-\frac{1}{3}}.$$

§ 7. Два примѣра, въ которыхъ скорость измѣняющей массы не равна нулю.

Въ заключеніе приведемъ два примѣра, изъ которыхъ въ одномъ скорость измѣняющей массы и скорость точки направлены по одной прямой, въ другомъ скорость измѣняющей массы направлена по линіи, соединяющей точку съ центромъ силы.

1. *Масса точки выражается формулой:*

$$m = \frac{m_0}{(1-\alpha t)^2},$$

гдѣ α положительная или отрицательная постоянная величина; требуется опредѣлить движеніе точки въ пустотѣ при дѣйствіи силы притяженія къ началу координатъ по закону Ньютона, предполагая, что скорость измѣняющей массы направлена въ ту же сторону, что и скорость точки, а по величинѣ вдвое менѣе послѣдней.

Уравненія движенія точки, по раздѣленіи на массу, будутъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -k\frac{x}{r^3} - \frac{1}{2m}\frac{dm}{dt}x' \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k\frac{y}{r^3} - \frac{1}{2m}\frac{dm}{dt}y' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

Въ настоящемъ случаѣ

$$\frac{1}{2m}\frac{dm}{dt} = \frac{\alpha}{1-\alpha t},$$

поэтому ур. (18) получаютъ тотъ же видъ, что и ур. (4), и, слѣдовательно, рѣшеніе задачи уже изложено въ § 3 и § 4.

Вообще, когда мы разсматриваемъ движеніе двухъ точекъ перемѣнныхъ массъ m_1 и m_2, причемъ скорость измѣняющей массы для первой точки равна нулю, а для второй направлена въ ту же сторону, что и скорость точки, и по величинѣ вдвое менѣе послѣдней,— легко замѣтить слѣдующее обстоятельство: если къ точкамъ приложены силы, пропорціональныя массамъ и дѣйствующія по одному и тому же закону, то при одинаковыхъ начальныхъ положеніяхъ и скоростяхъ точки движутся совершенно одинаково, если только $m_2 = Cm^2_1$, гдѣ C величина постоянная.

2. *Опредѣлить движеніе точки, масса которой выражается формулой:*

$$m = \frac{m_0}{1-\alpha t},$$

гдѣ α положительная или отрицательная постоянная величина, при дѣйствіи силы притяженія къ началу координатъ по закону Ньютона, предполагая, что скорость измѣняющей массы направлена по радіусу вектору точки въ ту или другую сторону и притомъ квадратъ этой скорости обратно пропорціоналенъ кубу радіуса вектора.

Обозначимъ скорость измѣняющей массы чрезъ u и пусть

$$u^2 = \frac{\varepsilon^2}{r^3},$$

причемъ мы будемъ брать ε со знакомъ +, когда скорость u направлена въ сторону отъ начала координатъ, и со знакомъ — въ противномъ случаѣ.

Уравненія движенія точки, по раздѣленіи на массу, представляются въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\left[\frac{k}{r^2} - \frac{\alpha\varepsilon}{(1-\alpha t)\, r^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{x}{r} - \frac{\alpha}{1-\alpha t}\, x' \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\left[\frac{k}{r^2} - \frac{\alpha\varepsilon}{(1-\alpha t)\, r^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{y}{r} - \frac{\alpha}{1-\alpha t}\, y'\end{aligned}\right\}\ldots.(19)$$

Введемъ новыя перемѣнныя ξ, η, τ посредствомъ ур. (5), тогда ур. (19) преобразуются въ слѣдующія:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = -\left(\frac{k}{\rho^2} - \frac{\alpha\varepsilon}{\rho^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{\xi}{\rho}$$

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -\left(\frac{k}{\rho^2} - \frac{\alpha\varepsilon}{\rho^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{\eta}{\rho}.$$

Такимъ образомъ разсматриваемая задача приведена къ задачѣ о движеніи точки постоянной массы при дѣйствіи двухъ центральныхъ силъ съ общимъ центромъ, изъ которыхъ одна слѣдуетъ закону Ньютона, а другая есть сила притягательная при $\alpha\varepsilon < 0$, отталкивательная при $\alpha\varepsilon > 0$, и по величинѣ обратно пропорціональная степени $\frac{3}{2}$ разстоянія точки отъ центра силы; отсюда слѣдуетъ, что наша задача рѣшается въ квадратурахъ.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

Опредѣленія массы, встрѣчающіяся въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ по механикѣ.

Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica.* 1687.

«Definitio I. Quantitas materiae est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim.... Hanc autem quantitatem sub nomine corporis vel *massae* in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque pondus: nam ponderi proportionalem esse reperi per experimenta pendulorum accuratissime instituta....»

D'Alambert въ *Traité de dynamique*, 1743, не даетъ опредѣленія массы.

Euler. *Mechànica sive motus scientia.* 1736.

На стр. 82 мы встрѣчаемъ такое мѣсто: «si uniusque corpusculi *massa seu pondus*....»; ранѣе опредѣленія массы не дается.

Euler. *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum.* 1765.

p. 57. «Definitio 15. *Massa* corporis vel *quantitas materiae* vocatur quantitas inertiae, quae in eo corpore inest, qua tam in statu suo perseverare, quam omni mutationi reluctari conatur».

p. 71. «.... litera A vero ejusdem corporis *massam* denotat, cujus cognitio per se occultior ex hoc ipso satis clare percipitur, quod sit ponderi proportionalis».

Lagrange. *Mécanique analytique.* 1788. 3-me éd. 1853. T. I, p. 59.

«On sait que la gravité agit verticalement et proportionnellement à la *masse*»; здѣсь впервые встрѣчается слово «masse»,— отдѣльнаго опредѣленія массы авторъ не даетъ.

Laplace. *Traité de mécanique céleste.* 1799. T. I, p. 40.

«La *masse* d'un corps est le nombre de ses points matériels»; но понятіе «point matériel», которое появляется на стр. 4, оставлено безъ опредѣленія.

Poisson. *Traité de mécanique.* 1811. 2-me éd. 1833. T. I.

p. 1. «La matière est tout ce qui peut affecter nos sens d'une manière quelconque.... On appelle *masse* d'un corps la quantité de matière dont il est composé».

p. 107. «Le poids d'un corps est en raison composée de sa *masse* et de l'intensité de la pesanteur dans le lieu où il est situé».

Poinsot. *Eléments de statique.* 5-me éd. 1830, p. 176.

«Le poids d'un corps est proportionel au nombre des molécules qui le composent ou à la quantité de matière qu'il renferme, et que l'on nomme sa *masse*».

Bour. *Cours de mécanique et machines. Statique.* 1868. p. 18.

«Il existe dans les corps une qualité en vertu de laquelle ils diffèrent les uns des autres au point de vue mécanique, et dont on reconnaît l'existance par les accélérations plus on moins grandes qu'ils éprouvent de la part d'une même force.... Cette qualité est ce qu'on nomme la *masse*; et l'on dit que deux corps, quelle que soit leur nature chimique, ont la même *masse*, lorsque, soumis à l'influence d'une même force, ils acquièrent des vitesses égales dans des temps égaux».

Schell. *Theorie der Bewegung und der Kräfte.* 1870. 2 Auf. Bd. II. 1880. pp. 1—3

«.... können wir 2, 3, 4, ...*m* congruente Systeme (имѣющія одинаковое движеніе) übereinanderlagern, welche ein Gesammtsystem von derselben Bewegung bilden, die sie selbst besitzen, in welchem aber jeder Punkt als ein 2, 3, 4 ....*m* werthiger Punkt aufzufassen ist.... Man kann den Coefficienten *m*, welcher die qualitative Verschiedenheit der Systempunkte charakterisirt und ihre Beschleunigungscapacität aller Ordnungen misst, den *Beschleunigungscoefficienten* derselben nennen.... Für die in diesem Buche durchzuführenden Betrachtungen wird es als constant angenommen und steht nichts im Wege, ihn die *Masse* zu nennen, obgleich dieser Name nicht die Allgemeinheit seines Wesens ausdrückt».

Poncelet. *Cours de mécanique.* 1874. T. I. p. 11.

«.... le rapport m ($m = \frac{p}{g}$, гдѣ p вѣсъ тѣла и g ускореніе силы тяжести), qui demeure indépendant de l'intensité de la gravité en chaque lieu, est précisément ce que l'on est convenu de nommer la *masse* du corps; définition qu'il faut admettre sans s'embarasser des idées physiques ou métaphysiques qu'on y attache quelquefois».

Kirchoff. *Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik.* 1876. 3 Auf. 1883. p. 22.

Разсматривая систему точекъ, подчиненныхъ связямъ, авторъ пишетъ уравненія движенія какой-либо i-ой точки въ такомъ видѣ, что въ лѣвыхъ частяхъ стоятъ только вторыя производныя отъ координатъ по времени, а въ правыхъ множители, соотвѣтствующіе различнымъ связямъ, раздѣлены на положительную величину m_i. «Die Grössen m_1, m_2,.... nennen wir die *Massen* der materiellen Punkte 1, 2,....»

p. 35 «$M = \Sigma m$.... man nennt dann M als die *Masse* des Systemes».

I. Сомовъ. *Раціональная механика.* 1877. Часть II. стр. 173—174.

«Сумма $m = \Sigma\mu$ динамическихъ коэффиціентовъ вѣсовъ матеріальныхъ точекъ, составляющихъ тѣло, называется *вѣсомою массою* тѣла». (Динамическимъ коэффиціентомъ авторъ называетъ отношеніе постоянной силы, дѣйствующей на матеріальную точку, къ тому ускоренію, которое эта сила сообщаетъ точкѣ). «Вѣсомая масса тѣла пропорціональна количеству эквивалентныхъ (т. е. имѣющихъ равные динамическіе коэффиціенты) матеріальныхъ точекъ, въ немъ находящихся; на этомъ основаніи вѣсомая масса тѣла разсматривается, какъ количество матеріи тѣла».

Thomson and Tait. *Treatise on natural philosophy*. 1879. P. I, p. 220.

«The Quantity of Matter in a body, or, as we now call it, the ***Mass*** of a body, is proportional, according to Newton, to the Volume and the Density conjointly. In reality, the definition gives us the meaning of density rather of mass».

Д. Бобылевъ. ***Курсъ аналитической механики***. 1884. Часть II, стр. 23—24.

«Количество матеріи тѣла называется ***массою*** его.

Опредѣленіе *c*. Отношеніе массъ двухъ тѣлъ обратно пропорціонально отношенію ускореній, сообщаемыхъ этимъ тѣламъ однородными и прямо-противоположными силами взаимодѣйствія между ними или вообще какими бы то ни было равными между собою силами, однородно-приложенными къ этимъ тѣламъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ отношеніе массъ двухъ тѣлъ равно отношенію величинъ однородныхъ силъ, сообщающихъ равныя ускоренія этимъ тѣламъ.... Масса тѣла равна суммѣ массъ всѣхъ частей его».

Budde. ***Allgemeine Mechanik der Puncte und starren Systeme***. 1890. B. I, p. 125.

«Die freie Kraft f, welche am Körper A thätig ist, ist das Product ($f = \epsilon q \dot{u}$) aus 1) der Beschleunigung $\dot{u}$ von A, 2) dem Gewicht q von A, 3) einer willkürlich zu wählenden Constante ϵ, die aber für alle A dieselbe, also durch eine einzige Wahl ein für allemal bestimmt ist.... Das Product ϵq nennen wir den Trägheitscoefficienten oder die ***Masse*** von A.

Appell. ***Traité de mécanique rationnelle***. 1893. T. I, p. 87.

«La masse d'un point matériel est le rapport constant qui existe entre l'intensité d'une force constante et l'accélération qu'elle imprime au point»

Hertz. ***Die Prinzipien der Mechanik***. 1894. Gesam. Werke. B. III, 54.

«Definition 1. Ein Massenteilchen ist ein Merkmal, durch welches wir einen bestimmten Punkt des Raumes zu einer gegebenen Zeit eindeutig zuordnen einem bestimmten Punkte des Raumes zu jeder anderen Zeit. Jedes Massenteilchen ist unveränderlich und unzerstörbar.

Definition 2. Die Zahl der Massenteilchen in einem beliebigen Raume, verglichen mit der Zahl der Massenteilchen, welche sich in einem festgesetzten Raume zu festgesetzter Zeit finden, heisst die in dem ersteren Raume enthaltene ***Masse***.

Definition 3. Eine endliche oder unendlich kleine Masse, vorgestellt in einem unendlich kleinen Raume, heisst ein materieller Punkt.

Definition 4. Eine Anzahl gleichzeitig betrachteter materieller Puncte heisst ein System materieller Puncte, oder kurz ein System. Die Summe der Massen der einzelnen Punkte ist nach 2 die ***Masse*** des Systems».

Изъ вышеуказанныхъ сочиненій можно, между прочимъ, видѣть, что, какъ бы авторъ ни опредѣлялъ массу, это опредѣленіе не имѣетъ вліянія на дальнѣйшее изложеніе.

При всѣхъ опредѣленіяхъ массы, масса тѣла равна суммѣ массъ всѣхъ частей его, и, слѣдовательно, ***измѣняемость массы*** тѣла не противорѣчитъ опредѣленіямъ массы.

